В.И. Рыжик

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Продолжение. Начало см. в № 2 за 2010 г.

В статье подробно рассматриваются важные вопросы стереометрии: угол между прямой и плоскостью, ортогональная проекция. Для закрепления усвоенного предлагаются несложные задачи и устные вопросы.

Иногда для решения задачи об углах помогает введение линейного параметра, т.е. какой-либо длины, обозначенной, скажем, буквой a. В конце выкладок введенный параметр после сокращения исчезает, поэтому с самого начала можно считать его равным 1 или 2 (чтобы было удобно при надобности делить его пополам). Использовать этот способ разумно, когда число пар «плоскость + прямая» больше единицы. Вот пример тому.

Задача 4. Дан прямоугольный параллелепипед. Известны два угла α и β, которые составляют с плоскостью основания скрещивающиеся диагонали его смежных боковых граней. Чему равен угол, который образует с основанием диагональ параллелепипеда?

Подсказка. Примите боковое ребро параллелепипеда равным 1, а затем выразите стороны основания и диагональ. Останется только найти тангенс искомого угла.

Задача 5. Дана правильная треугольная пирамида. Известен угол между боковым ребром и основанием. Как найти угол между стороной основания и боковой гранью, в которой она не лежит?

Замечание 5 (для знатоков). Заданным углом (плоским при вершине, углом между ребром и гранью, между гранями) в правильной треугольной пирамиде однозначно определяются прочие углы, так как все такие пирамиды с каким-либо фиксированным углом подобны (это следует из того, что равны все их двугранные углы, что, в свою очередь, следует из теоремы косинусов для трехгранного угла).

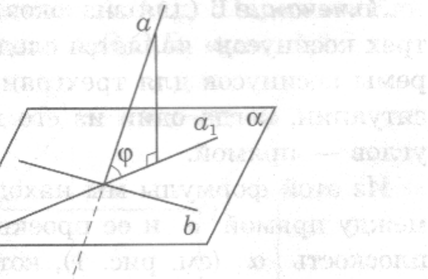

Рис. 1

Есть две (неявные) формулы для нахождения угла между прямой и плоскостью.

Первая из них — известная «формула трех косинусов»:

$$\cos\angle ab = \cos\angle aa_1 \cdot \cos\angle a_1 b,$$

где a — данная прямая, пересекающая плоскость α под острым углом φ, b —

некоторая прямая этой плоскости, a_1 — проекция прямой a на плоскость α (рис. 1).

Эту формулу несложно доказать. Нарисуйте три луча a, b, c с общим началом O и пусть луч b является проекцией луча c на плоскость, в которой лежат лучи a и b, а двугранный угол с ребром b — прямой. Возьмите на прямой b точку B, отличную от O, являющуюся проекцией точки C луча c. Пусть точка A является проекцией точки B на прямую a (рис. 2). Рассмотрите три прямоугольных треугольника: OBC, OAB и ABC. Все должно получиться [?]*.

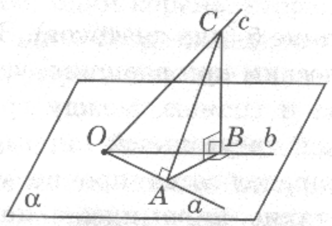

Рис. 2

Формула работает и тогда, когда прямая a не проходит через точку O **[?]**.

Замечание 6 (для знатоков). «Формула трех косинусов» является следствием теоремы косинусов для трехгранного угла в ситуации, когда один из его двугранных углов — прямой.

Из этой формулы мы находим угол φ между прямой a и ее проекцией a_1 на плоскость α (см. рис. 1), который и является углом между данными прямой и плоскостью:

$$\cos\varphi = \cos\angle aa_1 = \frac{\cos\angle ab}{\cos\angle a_1 b}.$$

Следствие. Практически даром получается из нее приведенное выше полезное утверждение: если из некоторой точки плоскости выходят три луча, не лежащие в одной плоскости, и один из них образует с двумя другими равные острые углы, то его проекцией на плоскость, определяемую этими двумя лучами, будет биссектриса угла между ними **[?]**. Верно и обратное утверждение **[?]**. А что будет, если отказаться от «остроты» данных углов?

Задача 6. Луч OC образует со сторонами OA и OB прямого угла AOB острые углы α и β соответственно. Найдите угол между лучом OC и плоскостью AOB.

Решение. Пусть OD — проекция луча OC на плоскость AOB. Обозначим угол COD через x, угол AOD через φ (рис. 3).

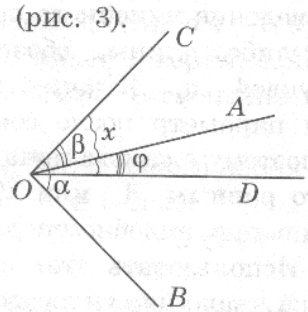

Рис. 3

Используя «формулу трех косинусов» два раза, получим:

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos x,$$
$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \varphi)\cos x.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Затем находим **[?]**

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}},$$

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}.$$

Задача имеет решение, если

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1. \quad (*)$$

Но откуда берется столь странное ограничение? Проведем небольшое исследование. Присмотримся внимательно

---

* Утверждения, отмеченные знаком вопроса, читателю предлагается обосновать самостоятельно.

к рисунку 3. Мы увидим трехгранный угол с вершиной O и ребрами OA, OB, OC. Согласно необходимому условию его существования, сумма углов AOC и BOC должна быть больше угла AOB, т.е. должно выполняться неравенство $\alpha + \beta > 90^\circ$. Это не похоже на условие (*). Оказывается, однако, что эти неравенства равносильны. В самом деле,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha < 1 - \cos^2\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha < \sin^2\beta \Leftrightarrow \cos\alpha < \sin\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha < \cos(90^\circ - \beta) \Leftrightarrow \alpha > 90^\circ - \beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta > 90^\circ.$$

Любопытно также посмотреть, что получится, если один из данных углов или даже оба будут тупыми. Попытайтесь разобраться в этом самостоятельно.

Задача 7. Из точки P к плоскости γ проведены перпендикуляр PQ и две взаимно перпендикулярные наклонные PA и PB. Наклонная PA образует с плоскостью γ угол α, а наклонная PB — угол β. При этом точка Q не лежит на прямой AB. Какой угол образует с плоскостью γ перпендикуляр PC, проведенный из точки P к прямой AB?

Подсказка. Рассмотрите разные случаи расположения точки C относительно точек A и B.

Еще одна полезная формула носит частный характер. Если даны три попарно перпендикулярные плоскости и некоторая прямая составляет с ними углы φ_1, φ_2, φ_3, то выполняется равенство

$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = 1. \qquad (**)$$

Доказать его несложно. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его диагональ AC_1 является гипотенузой в трех прямоугольных треугольниках: ACC_1, AB_1C_1, AD_1C_1 (рис. 4). В этих треугольниках находятся углы φ_1, φ_2, φ_3.

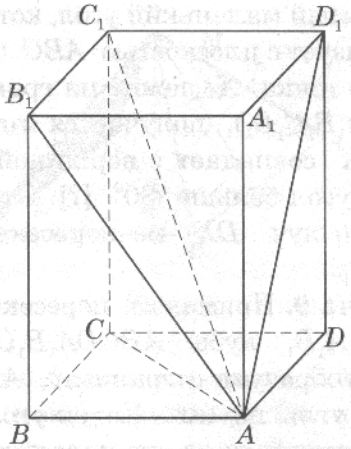

Рис. 4

Замечание 7 (для знатоков). Формула (**) является следствием известной формулы для направляющих косинусов прямой, когда заданы ее углы α, β, γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Задача 8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из его вершины D выходит луч DX. Он образует с плоскостью ADA_1 угол 30°, а с плоскостью CDC_1 — угол 45° и пересекает плоскость $A_1B_1C_1$. Пересекает ли этот луч грань $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 5)?

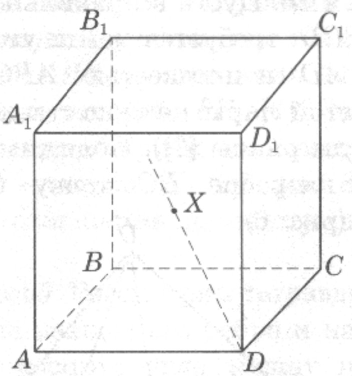

Рис. 5

Решение. Найдем угол между лучом DX и плоскостью ABC. Из формулы (**) получаем, что $\varphi_3 = 30^\circ$ [?]. С другой стороны, самый маленький угол, который луч DX образует с плоскостью ABC (при условии, что точка X лежит на границе квадрата $A_1B_1C_1D_1$), получается тогда, когда точка X совпадает с вершиной B_1 **[?]**. Но этот угол больше $30°$ **[?]**. Отсюда следует, что луч DX не пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$.

Задача 9. Прямая a пересекает ребра AD и A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что она образует с гранями AA_1D_1D и AA_1B_1B углы по $30°$. Какой угол прямая a образует с гранью, не параллельной ни одной из двух указанных граней?

Наконец, для вычисления угла между прямой a и плоскостью α можно использовать его экстремальное свойство, а именно: среди всех углов, которые прямые плоскости α образуют с данной прямой a, пересекающей α, наименьший угол дает проекция прямой a на плоскость α. Вот как это соображение работает в стандартной задаче на вычисление угла между прямой и плоскостью.

Задача 10. Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и плоскостью грани, в которой оно не лежит.

Решение. Пусть в правильном тетраэдре $ABCD$ требуется найти угол между ребром AD и плоскостью ABC (выбор именно этой пары не существен, ибо все такие углы равны **[?]**). Положим $AB = 1$. Возьмем на ребре BC точку T, пусть $CT = x$ (рис. 6).

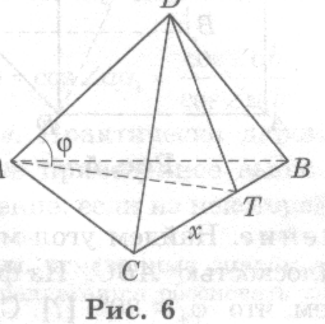

Рис. 6

Для $\angle DAT = \varphi$ из треугольника ATD по теореме косинуса получим **[?]**

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 0{,}5}}.$$

Отсюда ясно, что при $x = 0{,}5$ (т.е. когда точка T совпадает с серединой ребра BC) искомый угол достигает наименьшего значения **[?]**.

Итак, для нахождения угла между прямой и плоскостью пользоваться определением не всегда просто из-за необходимости находить проекцию прямой на плоскость, для чего требуется из какой-либо точки этой прямой проводить перпендикуляр к данной плоскости. Именно это, как мы видели, и вызывает некоторые трудности. Но их можно избежать, прибегнув к нормали: ее проводят в том месте, где это удобно. Тем самым мы выходим на угол между скрещивающимися прямыми, о чем говорилось в статье [2]. В дальнейшем изложении будут использоваться способы для вычисления угла между скрещивающимися прямыми, описанные в этой статье.

Приведу несколько примеров использования нормали. В них, как и в предыдущих задачах, возможны такие ситуации: на сделанном рисунке нормаль уже есть; нормали на рисунке нет, но ее легко нарисовать; определить положение нормали на рисунке непросто или даже невозможно.

Для вычисления угла между скрещивающимися прямыми «рабочими» являются три формулы. Первая — «формула трех косинусов», о которой говорилось выше. Вторая — «формула проекций»:

$$\cos\varphi = \frac{d_1}{d},$$

где φ — угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат отрезки длинами d и d_1, причем отрезок длиной d_1 является ортогональной проекцией отрезка длиной d (рис. 7). Третья — «формула четырех точек»: если точки A, B, C, D лежат на скрещивающихся прямых (иначе говоря, являются вершинами тетраэдра), то

$$\cos\angle(AB,\ CD) = \frac{|(AC^2 + BD^2) - (AD^2 + BC^2)|}{2 \cdot AB \cdot CD}.$$

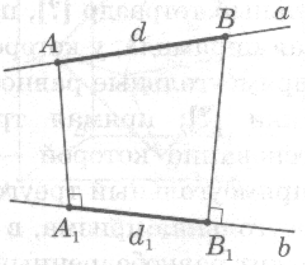

Рис. 7

В какой задаче использовать ту или иную формулу, я сказать не берусь. Все зависит от вашего опыта и личных пристрастий. Третья формула предполагает больше расчетов, а первые две — больше «геометрии», при работе с ними вычисления могут сводиться к минимуму. Полезно знать и уметь применять разные формулы хотя бы для того, чтобы убедиться в истинности полученного результата.

Задача 11. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны. Найдите угол между боковым ребром и боковой гранью, в которой это ребро не лежит.

Решение. Пусть в пирамиде $PABCD$ требуется найти угол между ребром PA и гранью PCD. Пусть PQ — высота пирамиды, QS — нормаль к грани PCD (рис. 8). Ребро пирамиды положим равным 2 (для удобства деления пополам).

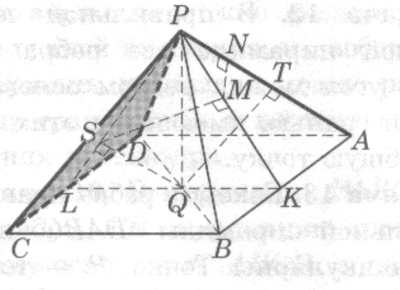

Рис. 8

Решение задачи сводится к нахождению угла между прямыми PA и QS по любой из трех указанных формул. Укажем план решения в каждом случае.

1-й способ. Пусть KL — средняя линия основания (квадрата $ABCD$). Отрезок QS лежит в плоскости KPL [?]. Проекцией прямой AP на плоскость KPL будет прямая KP. Теперь имеем:

$$\cos\angle(AP,\ QS) = \\ = \cos\angle APK \cdot \cos\angle(PK,\ QS).$$

Косинусы углов в правой части равенства подсчитать несложно.

2-й способ. Спроектируем точки Q и S на прямую AP. Проекцией точки Q будет середина отрезка AP — точка T [?]. Проекцию точки S построим в два приема. Сначала спроектируем точку S на плоскость APB — проекция (точка M) окажется на прямой PK [?]. Затем точку M спроектируем на прямую PA: проекция — точка N (см. рис. 8). Далее находим отношение длин отрезков TN и AP.

3-й способ. Рассмотрим тетраэдр $PAQS$. Вычислим каждое его ребро и найдем по формуле косинус угла между прямыми PA и QS.

Разумеется, все полученные ответы должны совпасть. Не забудьте: каждое вычисление дает не сам искомый угол, а угол, дополняющий его до $90°$.

Задача 12. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны. Найти угол между ребром основания и боковой гранью, имеющей с этим ребром одну общую точку.

Задача 13. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $DABC$ попарно перпендикулярны. Точка P — точка пересечения медиан боковой грани ACD, точка Q — точка пересечения медиан основания ABC. Чему равен угол между прямой PQ и плоскостью ABD?

Подсказка. Нормалью к плоскости ABD является прямая CD.

Задача 14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой B_1K, где точка K — середина ребра CD, и плоскостью A_1C_1D.

Подсказка. Нормаль к плоскости A_1C_1D — диагональ D_1B. Задача сводится к нахождению угла между скрещивающимися прямыми KB_1 и D_1B.

Задача 15. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, на его ребре BD отмечена точка T. В каких границах лежит угол, который прямая AT образует с плоскостью, проходящей через середины K, N, M, L ребер AD, AB, BC, CD соответственно (рис. 9)?

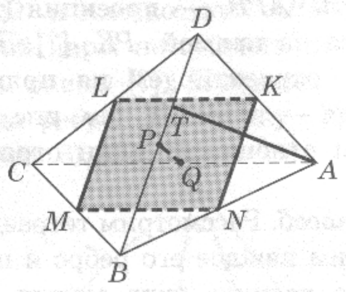

Рис. 9

Подсказка. Рассмотрите нормаль PQ к данной плоскости и тетраэдр $ATPQ$. По «формуле четырех точек»

$$\cos\angle(AT,\ PQ)=\frac{|(AP^2+QT^2)-(AQ^2+PT^2)|}{2\cdot AT\cdot PQ}.$$

Встречаются задачи, в которых дан многогранник, являющийся частью куба (прямоугольного параллелепипеда). Такова, к примеру, четырехугольная пирамида с квадратным основанием и ребром, ему перпендикулярным и равным стороне основания [?]. Частью куба являются также: правильный тетраэдр [?], правильная треугольная пирамида, у которой боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники [?]; прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный прямоугольный треугольник [?]; прямая треугольная призма, в основании которой лежит равнобедренный треугольник, а его высота, проведенная к основанию, равна боковому ребру [?]. Поэтому углы в таких многогранниках можно находить, как углы в кубе. Эти факты могут вам пригодиться.

В частности, вы можете вернуться к задаче 11 и данную в условии пирамиду $PABCD$ рассмотреть как часть прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда грань PCD пирамиды является частью сечения этого параллелепипеда плоскостью CDD_2 (рис. 10). Несложно найти проекцию прямой AP на плоскость CDD_2, после чего искомый угол находится согласно определению [?].

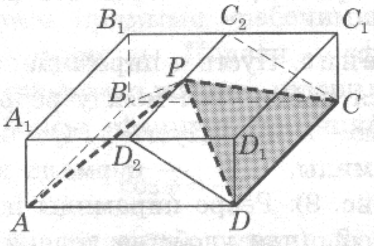

Рис. 10

Используя куб, вы сможете самостоятельно вычислить некоторые углы между ребрами и гранями в других многогранниках. Например, разобраться не только с правильным тетраэдром, но и с октаэдром (рис. 11), икосаэдром (рис. 12), додекаэдром (рис. 13).

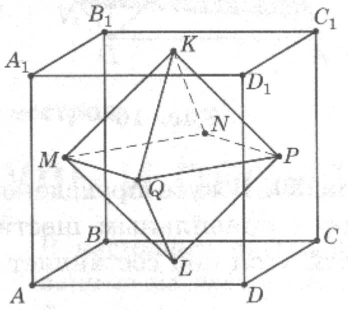

Рис. 11

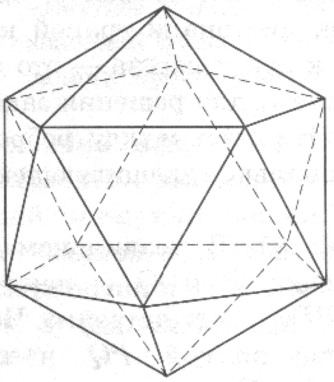

Рис. 12

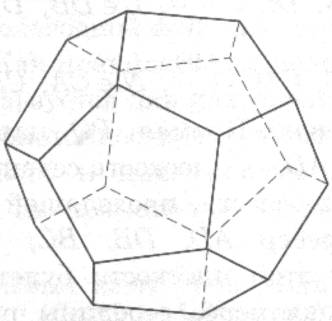

Рис. 13

Замечание 8 (для знатоков). Как известно, додекаэдр двойствен икосаэдру, т.е. его вершины можно расположить в центре граней икосаэдра, и наоборот. Далее, вершины икосаэдра можно расположить на гранях куба, а вершины куба — на гранях додекаэдра.

Задача 16. В пирамиде $PABCD$ боковое ребро PB перпендикулярно квадратному основанию $ABCD$ и равно его стороне. Точка Q — середина ребра PA. Найдите угол между прямой CQ и плоскостью APD.

Задача 17. В пирамиде $PABCD$ основанием служит квадрат $ABCD$, боковая грань PAB является равнобедренным треугольником и перпендикулярна основанию пирамиды, вершина P проектируется в середину ребра AB, высота пирамиды равна стороне основания. Чему равен угол между ребром PB и плоскостью PCD?

Подсказка. Данная пирамида легко достраивается до куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Грань PCD пирамиды лежит в сечения куба плоскостью A_1B_1C. Нормалью к этой плоскости будет диагональ AD_1 грани куба (рис. 14). Теперь несложно довести решение до ответа.

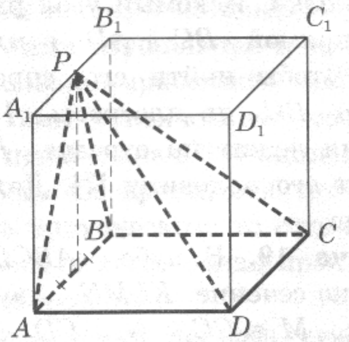

Рис. 14

В некоторых ситуациях можно использовать инвариантность угла между прямой и плоскостью относительно параллельного переноса. Иначе говоря, мы переносим прямую либо плоскость, либо ту и другую параллельно самим себе так, чтобы они оказались в удобном (с точки зрения дальнейших вычислений) положении. Вот примеры.

В задаче 11 для нахождения угла достаточно провести прямую QG, параллельную AP, и искать затем нужный нам угол из треугольника QGS (рис. 15).

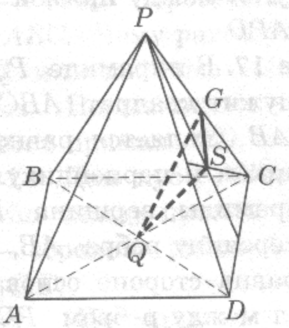

Рис. 15

Задача 18. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ основание является квадратом, боковое ребро PB ему перпендикулярно и равно стороне квадрата. Вычислите угол между прямой AD и плоскостью PCD.

Подсказка. Искомый угол равен углу между прямой $BC \parallel AD$ и плоскостью PCD. Чтобы найти его, спроектируйте ребро BC на плоскость PCD. Его проекция лежит на отрезке PC и составляет его половину **[?]**. Дальнейшее очевидно.

Задача 19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение $KLMN$, где $K \in AB$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$, $N \in CD$, $BK = BL$, $CM = CN$. Чему равен угол между прямой A_1D и плоскостью этого сечения?

Подсказка. Плоскость сечения параллельна плоскости AB_1C_1 **[?]**, поэтому достаточно найти угол между прямой A_1D и плоскостью AB_1C_1 (рис. 16).

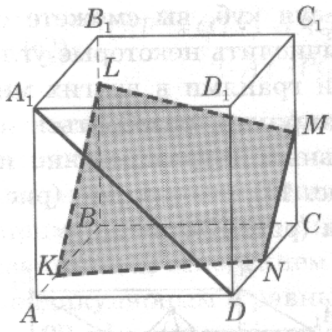

Рис. 16

Задача 20. В кубе проведено сечение, являющееся правильным шестиугольником. Какой угол оно составляет с ребром куба?

Подсказка. Плоскости данного сечения параллельна плоскость, проходящая через три диагонали граней куба **[?]**, а нормаль к ней известна — это диагональ куба. Поэтому для решения задачи достаточно найти угол между ребром куба и его диагональю, скрещивающейся с этим ребром.

Задача 21. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки P и Q — центры граней ABC и BDC соответственно. Чему равен угол между прямой PQ и плоскостью сечения $KLMN$, где

$$K \in DA,\ DK = \frac{DA}{3},\ L \in DB,\ DL = \frac{DB}{3},$$

$$M \in BC,\ CM = \frac{CB}{3},\ N \in CA,\ CN = \frac{CA}{3}?$$

Подсказка. Прямая PQ параллельна прямой AD, а плоскость сечения параллельна плоскости, проходящей через середины ребер AD, DB, BC, CA. Нормалью к этой плоскости будет прямая, проходящая через середины ребер AB и CD.

Мы видим, что нормаль нас часто выручает, но бывает и так, что ее отыскать непросто. Тогда остаются еще два способа, использующие векторы или координаты. Вообще геометрические методы успешнее работают в ситуации, когда есть та или иная симметрия в исходных данных. Если же прямая и плоскость располагаются «некрасиво», приходится прибегать к наиболее общим методам решения.

Литература

1. *Рыжик В.И.* О расстоянии вообще и расстоянии между скрещивающимися прямыми в частности // Математика для школьников. — 2007. — № 4; 2008. — № 1.

2. *Рыжик В.И.* Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах // Математика для школьников. — 2008. — № 3–4.

(*Окончание следует.*)