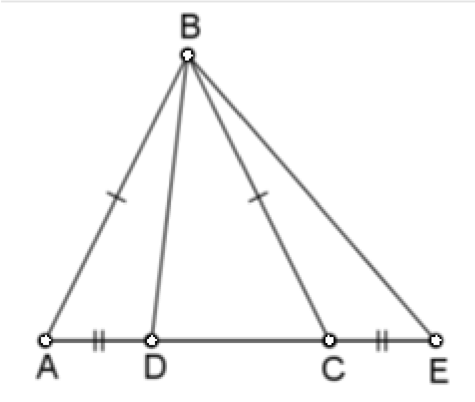
Варианты вступительных работ по математике в 8 класс

2008 год

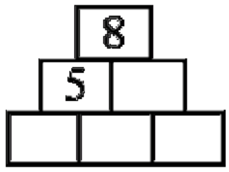
1. Найдите все двузначные числа, равные квадрату числа его единиц, сложенному с кубом числа его десятков. Например, число 32 не удовлетворяет условию, так как $2^2 + 3^3 = 31$ не равно 32.
2. Докажите, что значение выражения $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2008}\right)$ больше 1000.
3. На рисунке $AB = BC$ и $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > AB + BC$.



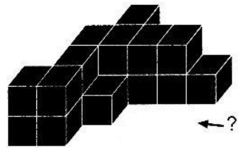
4. Леша и Ваня поочередно пишут на доске цифры 30-значного числа, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5. Начинает Леша, а Ваня хочет получить число, кратное 9. Может ли Леша ему помешать?
5. Группа пильщиков распиливала бревна на полуметровые куски. Было объявлено, что если количество кусков превысит 70, то рабочим будет выдана премия. Группа разделилась на две бригады. Первая распилила несколько трехметровых бревен, а вторая несколько бревен длиной $3\frac{1}{2}$ метра. Вторая бригада напилила на 1 кусок меньше, чем первая. Получат ли пильщики премию?
6. Расставьте 7 звездочек в квадрате 4×4 так, чтобы при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов оставалась не вычеркнутой хотя бы одна звездочка.

2009 год

1. Поместите числа 1, 2, 3 и 4 в четыре пустых кирпичика (см. рисунок). Во втором и третьем ряду пирамиды число, вписанное в кирпичик, должно быть равно сумме чисел, вписанных в кирпичики, на которых он лежит.



2. Возраст отца равен сумме возрастов его трех сыновей. Через 10 лет отец будет вдвое старше своего старшего сына, через 20 лет он будет вдвое старше своего среднего сына, а через 30 лет – вдвое старше младшего. Сколько лет отцу и сыновьям в настоящее время?
3. Вася посмотрел на фигурку (см. рисунок) сверху и заполнил табличку. Заполните аналогичную табличку, глядя на эту же фигурку справа.



		2			
	2	2	2	2	1
	2	1			
2	2				

4. У Бальбины есть пять гирь A, B, C, D и E разного веса. Вес каждой гири – целое число килограммов от 1 кг до 5 кг.

   С помощью весов Бальбина устанавливает, что:

   • A и B, взятые вместе, тяжелее, чем C, D и E, взятые все вместе;

   • B и C, взятые вместе, уравновешивают одну E.

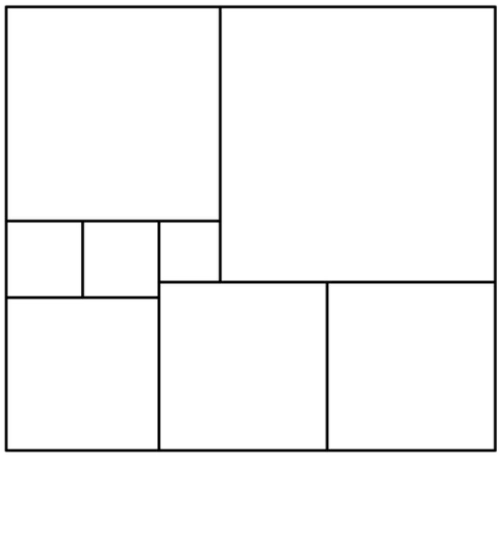
   Каков вес каждой гири в отдельности? Не забудьте, что нужно привести не только ответ, но и рассуждения.
5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отметили точки P, T, K соответственно, причем $AP = AK, BP = BT, CK = CT$. Известно, что в треугольнике PTK $\angle P < \angle T < \angle K$. Расположите по возрастанию углы треугольника ABC. Поясните, почему ответ именно такой.
6. В десятичной записи двух чисел присутствуют только цифры 1, 4, 6 и 9. Может ли одно из них быть ровно в 17 раз больше другого?

2010 год

1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$. Из точки D, середины AB, проведен перпендикуляр к стороне AB, пересекающий сторону BC в точке E. Периметр ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC.
2. Докажите, что число $\underbrace{1111111111111111}_{16\text{ цифр}} - \underbrace{22222222}_{8\text{ цифр}}$ является квадратом некоторого натурального числа.
3. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные трехзначные числа, все цифры в которых различны. Найдите сумму этих чисел.
4. Найдите все натуральные числа n такие, что числа $n + 15$ и $n - 74$ точные квадраты, то есть квадраты некоторых натуральных чисел.
5. Коля и Вася живут в одном доме, в каждом подъезде которого по 4 квартиры на каждом этаже. Коля живет на 5 этаже в 83 квартире, а Вася живет на 3 этаже в 169 квартире. Сколько всего этажей в доме?
6. В полдень 1 апреля самолет вылетел из столицы в город Бийск и приземлился там в 14 часов местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 часов утра 2 апреля. Сколько времени длился полет в одну сторону, если известно, что время полета туда и обратно было одинаково?

2011 год

1. Назовем клетчатый квадратный коврик пестреньким, если каждая его клетка покрашена, и никакие две клетки, имеющие хотя бы одну общую точку, не покрашены в один цвет. Существует ли 5-цветный пестренький коврик размером 5 на 5?
2. В дремучем Муромском лесу растут дубы и осины. Известно, что дубы составляют 99% всех деревьев. Илья Муромец вырубил часть дубов, так что в выжившем лесу стало 98% дубов. Какую (в процентах) часть леса вырубил Илья Муромец?
3. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через два, делилась на три?
4. В треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересеклись в одной точке. Найдите градусную меру угла B.
5. Если сумма 2000 положительных целых чисел равна 2001, то чему равно их произведение?
6. Прямоугольник разбили на 8 квадратов (см. рисунок). Сторона самого маленького квадрата (в центре) равна 4. Чему равна сторона самого большого?



2012 год

1. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 192, а наибольший общий делитель равен 24. Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.
2. Дорога из А в В идет 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровной местности. Путь от А до В мотоциклист проехал за 1 час и 7 минут, а от В до А за 1 час и 16 минут. Найдите его скорости движения в гору и под гору, если его скорость на горизонтальном участке 18 км/ч.
3. Что больше: $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?
4. Температура в разных странах измеряется разными шкалами (имеет разные единицы измерения). Например, в России температура измеряется в градусах по шкале Цельсия, а в Америке в градусах по шкале Фаренгейта. Известно, что один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта (то есть при изменении температуры на один градус по шкале Цельсия она изменяется на 1,8 градусов по шкале Фаренгейта), при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?
5. В равнобедренном треугольнике ABC с тупым углом ABC на основании AC отметили точку M так, что хотя бы один из треугольников ABM и BCM оказался равнобедренным. Укажите все возможные положения точки M, если $\angle ABC = 120°$. При каком значении тупого угла ABC возможных положений точки M меньше всего?
6. Известно, что из четырех утверждений два верных и два неверных:
   - Число A делится на 5;
   - Число A делится на 23;
   - Число $A + 7$ является квадратом натурального числа;
   - Число $A - 10$ является квадратом натурального числа.

   Найдите все такие двузначные числа A. Поясните, почему других чисел нет.

2013 год

1. У Вани на 90 конфет больше, чем у Маши. Одновременно Ваня и Маша отдали друг другу треть всех конфет, которые у них были. На сколько конфет больше теперь у Вани?
2. Журнал "Пять Эйнштейнов и Барсук" учредил премию тому, кто разложит 100 конфет на 10 кучек так, чтобы в каждой кучке было разное число конфет, но никакую из них нельзя было бы разбить на две так, чтобы число конфет во всех 11 кучках оставалось различным. Подскажите, как это можно сделать.
3. Положительные числа a и b таковы, что $a^2 + b = b^2 + a$. Иван Васильевич поспорил с Анатолием Алексеевичем, что тогда обязательно $a = b$. Кто выиграл спор?
4. В ΔABC $\angle B = 40°$, $\angle C = 20°$. AM – биссектриса, $AM = 2$ см. Найти разность длин отрезков BC и AC.
5. Сравните числа $\frac{2012}{2013}$ и $\frac{20122013}{20132012}$.
6. Спускаясь по движущемуся вниз эскалатору, Леша наступил на 50 ступенек, а шагавший втрое быстрее Юра – на 75 ступенек.

   а) Во сколько раз меньше времени затратил на спуск Юра?

   б) Сколько всего ступенек на неподвижном эскалаторе?

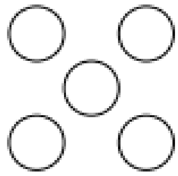
2014 год

1. Косте с Лешей подарили пирог с капустой и торт "Наполеон". Леша съедает пирог за 2 минуты, а торт – за 3 минуты. Костя съедает пирог за 5 минут, а торт – за 4 минуты. Удастся ли им вместе съесть всю еду за 3 минуты?
2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $BD = AD = CD$. Найдите $\angle ADC$, если известно, что $\angle ABC = 130°$.
3. Какое из чисел больше: 2 или $29\frac{13}{17} \cdot 30\frac{13}{17} - 28\frac{13}{17} \cdot 31\frac{13}{17}$?
4. Найдите значение выражения $x^3 + y^3$, если $xy = 13$ и $x^2 + y^2 = 38$.
5. а) У Валеры и Юры есть по девять одинаковых карточек с цифрами от 1 до 9. Юра выложил свои карточки в ряд по порядку (1, 2, 3, …), а Валера выкладывает свои карточки под Юриными так, чтобы в каждом столбике сумма чисел являлась точным квадратом (например, если под Юриной карточкой "1" положить "3", то $1 + 3 = 4 = 2^2$). Удастся ли Валере выложить все свои карточки?

   б) Удастся ли Валере выложить свои карточки, если у каждого из них есть по 11 карточек с числами от 1 до 11?

2015 год

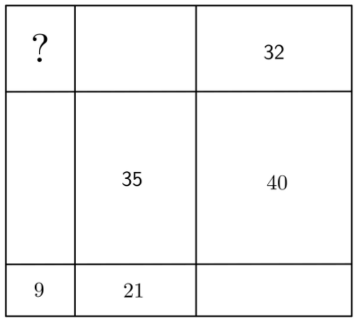
1. Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы трех остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках – в 5 раз меньше суммы трех остальных цифр.



2. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?
3. В треугольнике ABC $\angle A = 20°, \angle B = 25°$. Из точки B опущен перпендикуляр BK на прямую AC. Найдите KC, если $BK = 5$.
4. Коробка содержит 900 карт, пронумерованных от 100 до 999. Павел вынимает карты из коробки случайным образом и вычисляет для каждой карты сумму написанных на ней цифр. Сколько карт нужно вытащить Павлу, чтобы быть уверенным, что среди них найдется хотя бы три карты с одинаковой суммой цифр?
5. Числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Верно ли, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$?
6. Вася выписал все трехзначные числа и вычислил в каждом числе произведение его цифр, а затем сложил все полученные произведения. Какое число у него получилось?

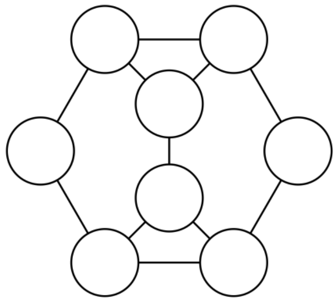
2016 год

1. Большой прямоугольник четырьмя линиями, параллельными основаниям, разбит на 9 прямоугольников, периметры пяти из которых указаны на рисунке. а) Найдите периметр левого верхнего прямоугольника. б) Найдите периметр всего прямоугольника.

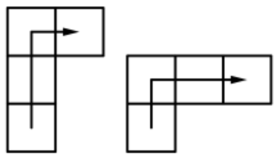


2. На одной из чашек весов лежит груз массой 27 грамм. Вася последовательно кладет на любую из двух чашек весов по одной гирьке. Масса первой гирьки равна 1 грамму, а каждая следующая гирька на 1 грамм тяжелее предыдущей. Какое наименьшее число гирь должен положить Вася для того, чтобы уравновесить весы?
3. В доме двое механических часов: одни отстают на 15 минут в сутки, а другие на 10 минут в сутки спешат. Сегодня в полдень и те, и другие часы показывали правильное время. Когда в следующий раз они одновременно покажут правильное время?
4. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.
5. Юра сложил два числа (не обязательно целых) – получил 2014, Костя перемножил эти же числа – получил 2015. Валере этого показалось мало, он увеличил каждое из двух Юриных чисел на единицу и только затем перемножил. Сколько получилось у Валеры?
6. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Победитель выиграл у всех и набрал в 5 раз меньше очков, чем все остальные вместе. Сколько было участников? (За победу в шахматной партии участник получает 1 очко, за ничью – 0,5 очка).

2017 год



1. Расставьте в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.
2. Однажды на дискотеке Даня познакомился с Таней. Но ровно в полночь она убежала домой в свой город. Утром Даня решил ее разыскать, но не успел узнать, где она живет: в городе рыцарей, в городе лжецов или в городе хитрецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы – лгут, а хитрецы иногда говорят правду, а иногда лгут). Он встретил представителей каждого из этих городов – Беню, Веню и Сеню. Каждому из них Даня задал по два вопроса: "Кем являешься ты? Кем является Таня?" Беня сказал: "Я не рыцарь. Таня – лжец". Веня: "Я не лжец. Таня – хитрец". Сеня: "Я не хитрец. Таня – рыцарь". Кем же является Таня?
3. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за точку B в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML являются также равнобедренными. Найдите углы треугольника ABC.
4. На полке в лаборантской ФТШ стояли интересные книги по математике. Юра взял треть всех книг и еще две книги, затем Леша взял половину оставшихся книг без одной книги, Костя – половину оставшихся к этому моменту и еще одну, а Таня – последние 8 книг. Сколько книг первоначально было на полке?
5. Шахматный конь хочет попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол на доске размером 2017×2018, делая ходы только вправо и вверх (см. рисунок). Сможет ли он это сделать? Ответ объясните.



6. Числа a, b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое это может быть значение? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

2018 год

1. Два угла треугольника равны $100°$ и $60°$. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.
2. Ваня, Аркаша, Леша и Даня провели круговой турнир по шахматам (каждый сыграл с каждым по одному разу, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков). Известно, что четыре партии было сыграно вничью, а Ваня набрал 0,5 очка. Леша сказал, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могло ли такое быть?
3. Найдите все положительные числа a и b, которые удовлетворяют системе уравнений:
$$\begin{cases} a^2 - 3ab = -2, \\ 4b^2 - ab = 2. \end{cases}$$
4. Между городами A и B 360 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Известно, что после встречи один поезд шел до пункта B еще 2 часа, а другой поезд шел до пункта A еще 4,5 часа. Найдите скорости поездов. (Скорости поездов постоянны на всем маршруте.)
5. Высоты BP и CQ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Оказалось, что $BH = AC$. Найдите угол ABC.
6. Десятичная запись числа состоит из десяти различных цифр. Цифра называется "хорошей", если она равна сумме двух своих соседей (слева и справа). Какое наибольшее количество "хороших" цифр может быть в таком числе?

2019 год

1. Приведите пример шести таких различных натуральных чисел, что их сумма делится на каждое из них.

2. Есть 2018 гирек массами 1 г, 2 г, …, 2018 г. Заяц положил на одну чашу весов две гирьки. Волк хотел двумя другими гирьками на другой чаше их уравновесить, но не смог. Какие гирьки мог взять Заяц? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

3. Докажите, что если $x^2 + u^2 = 2(xy + yz + zu - y^2 - z^2)$, то $x = y = z = u$.

4. В таверне встретились мушкетеры и гвардейцы кардинала, всего 55 человек. Каждый из них пил либо анжуйское вино, либо бургундское вино. Известно, что мушкетеры говорят правду, когда пьют анжуйское, и обманывают, когда пьют бургундское, а гвардейцы – наоборот. На вопрос “Вы пьете бургундское?” ответили “Да” 44 человека, а на вопрос “Вы гвардеец?” – 33 человека. С утверждением “На улице идет дождь” согласились 22 человека. Сколько мушкетеров пили бургундское?

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что лучи AM и AN делят угол BAD на три равные части. ME – высота треугольника MAN. Найдите угол EDN.

6. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя – на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

2020 год

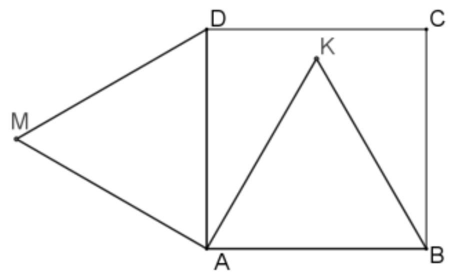
1. Костя сложил пять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих за ними пяти натуральных чисел. Могло ли у него получиться число 0,8?

2. Каждая из двух девочек, Таня и Лена, задумала по натуральному числу, возвела его в куб и вычла задуманное ею число. Полученные ими разности оказались одинаковыми. Могло ли так случиться, что Таня и Лена задумали различные числа?

3. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы вместе 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наибольшее количество леденцов может быть у Лизы?

4. Докажите, что число $\left(\frac{2019^2+2021^2}{2}\right)^2$ можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

5. $ABCD$ – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см. рисунок). Лежат ли точки C, M и K на одной прямой?



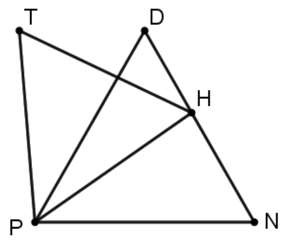
6. Сколькими способами можно заполнить таблицу 5×5 клеток нулями и единицами так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была четной?

2021 год

1. Докажите, что из 2021 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2021 можно составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1.
2. Сумма пяти различных чисел равна 50, сумма каких-то четырёх из них равна 40, а сумма каких-то трёх равна 30. Докажите, что из этих пяти чисел можно выбрать четыре различных числа a, b, c и d так, что $a+b=c+d$.
3. 23 детям в детском саду показали картинку и попросили записать, что на ней изображено. Часть детей написали КЫСЯ, часть детей — МУРЛОКОТАМ, а остальные — КОТЯРКА. Буква К была написана 30 раз, буква Я была написано 20 раз. Сколько детей написали слово КЫСЯ?
4. На крыше здания сидели вороны. Когда пришёл хулиган Лёша и пальнул в них из рогатки, 75% ворон улетели; вместо них на крышу прилетело 80 других ворон. Тогда хулиган Лёша пальнул в них ещё раз, и 80% ворон улетело, а взамен прилетело 75 других ворон. В результате ворон на крыше оказалось меньше, чем до начала хулиганских действий Лёши. Какое наименьшее число ворон могло сидеть на крыше до Лёшиного прихода?
5. Из середины M стороны AB равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры MK и ML на стороны AC и BC. Найдите KL, если $AB=1$.
6. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идёт пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.

2022 год

1. Существует ли натуральное число, квадрат которого равен 9999000025?
2. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа (не обязательно целые) так, что во всех строчках и во всех столбцах сумма чисел одинаковая. В верхнем правом квадрате 2×2 сумма чисел оказалась равной 10, а в левом нижнем квадрате 3×3 сумма оказалась равной 15. Найдите сумму всех чисел в квадрате.
3. Докажите, что если $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y$ при положительных x, y, то $x = y = 1$.
4. Когда Лёша прошёл $\frac{4}{9}$ длины моста, он заметил, что его догоняет машина, ещё не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил своё движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и Лёши.



5. Точка H лежит на стороне DN равностороннего треугольника PND. Треугольник PTH также равносторонний, точки T и D лежат по одну сторону от прямой PN. Высота треугольника PND равна 5. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую PN.
6. Имеется 37 карточек, каждая из которых выкрашена с одной стороны в зеленый, а с другой – в синий цвет. Карточки разложены подряд в виде полосы так, что у 9 карточек сверху оказался синий цвет. За один ход разрешается перевернуть любые 20 карточек. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы полоса стала полностью зеленой? А полностью синей? Если можно, то какое наименьшее число ходов для этого потребуется?

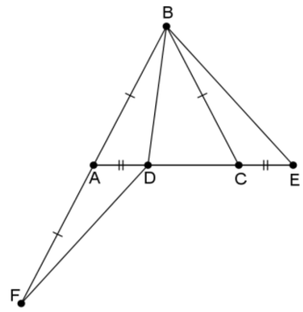
Решения вступительных работ

2008 год

1. Пусть число десятков равно a, а число единиц b. Тогда a должно быть меньше 5 ($5^3 = 125$, т.е. уже не двузначное число). Также a не равно 4 ($4^3 = 64$ и двузначное число не может начинаться с 4). Из условия ясно, что числа a и b должны удовлетворять уравнению $10a + b = a^3 + b^2$, то есть $10a - a^3 = b(b-1) \Leftrightarrow a^3 = 10a - b(b-1)$.
   $10a$ – число четное; числа $(b-1)$ и b – последовательные, значит, одно из них четное, т.е. $b(b-1)$ тоже четное, тогда и a^3 четное, откуда следует, что само a тоже четное число. Таким образом, a может равняться только 2, а b удовлетворяет уравнению $20 + b = 8 + b^2$, откуда $b(b-1) = 12$, то есть $b = 4$.
   Ответ: 24.

2. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2008}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2007}\cdot\frac{2009}{2008} = \frac{2009}{2} > 1000.$

3. Отложим на прямой AB от точки A отрезок, равный отрезку BC. Получим точку F. Рассмотрим треугольники CBE и ADF:
   $\angle DAF = 180° - \angle CAB$; $\angle BCE = 180° - \angle BCA$.
   При этом $\angle BCA = \angle CAB$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC.
   Значит, $\angle DAF = \angle BCE$. Треугольники CBE и ADF равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, $BE = DF$. По неравенству треугольника $BD + DF > AB + AF$, откуда следует требуемое неравенство $BD + BE > AB + BC$.



4. Не может. Ваня будет каждый раз "дополнять" число Леши до 6 (то есть, если Леша пишет 1, то Ваня пишет 5, если Леша пишет 2, то Ваня пишет 4 и так далее). Тогда сумма цифр полученного 30-значного числа будет равняться $6 \cdot 15 = 90$, то есть делиться на 9, значит, и само число тоже будет делиться на 9. Ваня выиграл, а Леша проиграл!
   Ответ: не может.

5. Пусть первая группа распилила x бревен длиной 3 метра, а вторая y бревен длиной $3\frac{1}{2}$ метра. Тогда всего полуметровых кусков $6x + 7y$, а число $6x$ больше числа $7y$ на 1, то есть $6x = 7y + 1$. Заметим, что при $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$ число $7y+1$ не делится на 6. Значит, $y \geq 5$.
   Тогда $6x = 7y + 1 \geq 36$ и общее количество кусков $6x + 7y \geq 36 + 35 = 71$, то есть премию бригада получит.
   Ответ: получит.

6. **Ответ:**

☆			☆
		☆	☆
	☆		
☆		☆	

2009 год

1. **Ответ:**

	8	
5		3
4	1	2

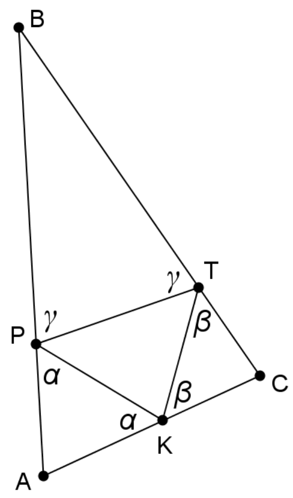
2. Обозначим за x возраст отца в настоящее время, a, b, c – возраста сыновей в настоящее время. Тогда:
$$\begin{cases} x = a + b + c, \\ 10 + x = 2(a + 10), \\ 20 + x = 2(b + 20), \\ 30 + x = 2(c + 30). \end{cases}$$
Складывая последние три равенства, получаем $60 + 3x = 2(a + b + c) + 120$. Заменив $a + b + c$ на x, получим $60 + 3x = 2x + 120$, откуда $x = 60$. Из последних трех равенств системы затем находим a, b, c.
Ответ: возраст отца 60 лет, сыновей 15, 20 и 25 лет.

3. **Ответ:**

2	1	4	1
2	2	5	1

4. Заменим гирю E в первом условии на сумму гирь B и C. Получим, что гири A и B, взятые вместе, тяжелее, чем C, D, B и C, то есть гиря A тяжелее, чем 2 гири C и гиря D. Отсюда сразу же получается, что гиря C весит 1 кг, гиря D 2 кг и гиря A 5 кг (ибо сумма 2 гирь C и гири D не меньше 4 кг). Из второго условия находим, что гиря B весит 3 кг, а гиря E весит 4 кг.
Ответ: Гиря A весит 5 кг, гиря B весит 3 кг, гиря C весит 1 кг, гиря D весит 2 кг, гиря E весит 4 кг.

5. Обозначим угол BPT как γ, угол CTK как β, угол AKP как α. Заметим, что треугольники BPT, TCK и APK – равнобедренные. Тогда $\alpha + \angle TPK + \gamma = \beta + \angle PKT + \alpha = \gamma + \angle KTP + \beta = 180°$. Откуда, учитывая условие $\angle P < \angle T < \angle K$, получаем, что $\alpha + \gamma > \beta + \gamma > \alpha + \beta$.
Следовательно $\gamma > \alpha > \beta$.
Из треугольников BPT, TCK, APK получаем, что $\angle A = 180° - 2\alpha$, $\angle B = 180° - 2\gamma$ и $\angle C = 180° - 2\beta$, то есть $\angle C > \angle A > \angle B$.
Ответ: $\angle C > \angle A > \angle B$.



6. Предположим, что это возможно. Тогда, если последняя цифра меньшего числа равна 1, то последняя цифра большего числа должна быть равна 7

($\dots 1 \cdot 17 = \dots 7$), чего не может быть. Если последняя цифра меньшего числа равна 4, то последняя цифра большего числа должна быть равна 8, чего не может быть. Аналогично последней цифрой меньшего числа не могут быть 6 и 9 (иначе последней цифрой большего числа были бы 2 и 3 соответственно), значит, одно такое число не может быть в 17 раз больше другого.

Ответ: нет, не может.

2010 год

1. Заметим, что $AB + BC = AB + BC + AC - AC = P_{ABC} - AC = 40 - 10 = 30$. Тогда $AB = BC = 15$.
   ED – высота и медиана треугольника BEA. Значит, треугольник BEA равнобедренный и $BE = EA$.
   Тогда периметр $P_{AEC} = AE + EC + AC = BE + EC + AC = BC + AC = 25$.
   Ответ: $P_{AEC} = 25$.

2. $\underbrace{1111111111111111}_{16\text{ цифр}} - \underbrace{22222222}_{8\text{ цифр}} = \underbrace{11111111}_{8\text{ цифр}} \cdot 1\underbrace{0000000}_{7\text{ цифр}}1 - 2 \cdot \underbrace{11111111}_{8\text{ цифр}} =$
   $= \underbrace{11111111}_{8\text{ цифр}} \cdot \left(1\underbrace{0000000}_{7\text{ цифр}}1 - 2\right) = \underbrace{11111111}_{8\text{ цифр}} \cdot \underbrace{99999999}_{8\text{ цифр}} = \underbrace{11111111}_{8\text{ цифр}}{}^2 \cdot 3^2 =$
   $= 33333333^2$.

3. Найдем, сколько таких трехзначных чисел с цифрой 1 в разряде единиц. В разряд сотен может быть записана любая из четырех оставшихся цифр (2, 3, 4, 5), а в разряд десятков после выбора цифры сотен может быть записана любая из оставшихся трех. Получается 4·3=12 чисел. Аналогично, есть ровно 12 чисел, у которых в разряде единиц будет каждая из остальных (2, 3, 4, 5) цифр.
   Точно так же показываем, что в разряде десятков и сотен каждая цифра встречается по 12 раз (то есть в 12 числах). То есть, сумма всех таких чисел равна:
   $12\cdot(100+200+300+400+500)+12\cdot(10+20+30+40+50)+12\cdot(1+2+3+4+5)=$
   $=12\cdot(1+2+3+4+5)\cdot 111=19980.$
   Ответ: 19980.

4. Пусть $n-74=a^2, n+15=b^2$, где a и b – натуральные числа. Тогда $(b-a)(b+a)=89$. Перебором убеждаемся, что 89 – простое число. Значит, $\begin{cases} b+a=89 \\ b-a=1 \end{cases}$, откуда $b=45, a=44$. При этом $n=a^2+74=1936+74=2010$.
   Ответ: n=2010.

5. Количество квартир в Колином подъезде до его квартиры включительно равно 4(количество квартир на этаже)·4(количество нижних этажей)+3(на его этаже)=19. Значит, количество квартир во всех предыдущих подъездах равно 83–19=64, а самих этажей во всех этих подъездах 64:4=16. Аналогично, в Васином подъезде 4·2+1=9 квартир с меньшими или равным номерами. Тогда количество квартир во всех предыдущих Васиному подъездах равно 169–9=160, а самих этажей во всех этих подъездах 160:4=40. И 16, и 40 должны делится на количество этажей в подъезде. При этом количество этажей не меньше 5. Единственный общий делитель 16 и 40, больший 4, это 8.
   Ответ: в доме 8 этажей.

6. Самолет отсутствовал в столице 18 часов. За все это время на земле он находился только в Бийске в течение 10 часов (24−14 по местному времени). Значит, остальное время – 8 часов – он летел. Тогда путь в одну сторону занял половину этого времени – 4 часа.
   Ответ: 4 часа.

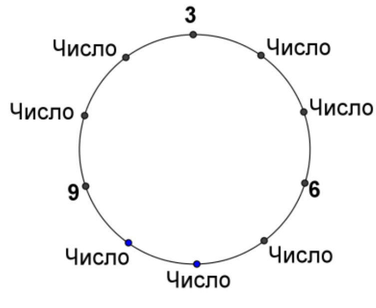
2011 год

1. **Ответ:** да, существует. Например (цифрами показаны разные цвета):

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

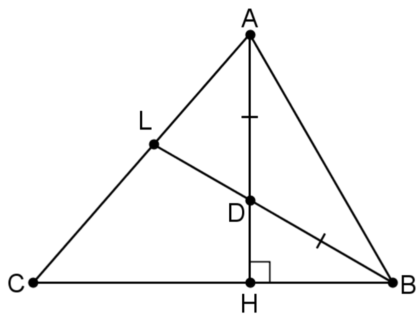
2. Давайте забудем про дубы, которые вырубили, и подумаем про осины, число которых не изменилось. Вначале их было x штук, которые составляли 1% леса, а в конце их осталось x штук, которые составляли 2% леса. Значит, сперва деревьев в лесу было $100x$, а потом стало $50x$. Значит, вырубили половину леса.
Ответ: 50%.

3. *Первое решение:* Предположим, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом. Тогда, сложив все суммы любых двух чисел, стоящих через два, получим, с одной стороны, число, делящееся на три, а с другой стороны, удвоенную сумму всех написанных чисел, так как в рассматриваемые суммы каждое число входит дважды (с левым через два соседом и с правым через два соседом). Но сумма натуральных чисел от 1 до 10 равна $\frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55$, удвоенная сумма равна 110 и на три не делится. Значит, мы пришли к противоречию и наше предположение о том, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом, неверно. Таким образом, расстановка невозможна.
Второе решение: Предположим, что это возможно. Тогда среди расставленных по кругу чисел наверняка есть число 3. Заметим, что среди чисел от 1 до 10 есть только два числа (6 и 9), которые в сумме с числом 3 дают результат, кратный трем. Это означает, что с одной стороны от числа 3 на расстоянии двух чисел стоит число 6, а с другой стороны – число 9. Тогда получается картинка, изображенная на рисунке.



Заметим, что на расстоянии двух чисел от числа 6 точно окажется не 3 и не 9, однако только 3 и 9 в сумме с 6 дают результат, кратный трем. Получаем противоречие – расстановка невозможна.
Ответ: невозможно.

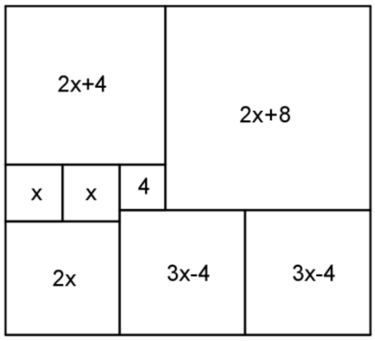
4. Из условия получаем, что углы при основании AB треугольника DAB равны. Пусть они равны x. Тогда угол DBH тоже равен x. В прямоугольном



треугольнике ABH сумма острых углов A и B равна $3x$, то есть $x = 30°$. Тогда угол B равен $60°$.
Ответ: $\angle B = 60°$.

5. Заметим, что рассматриваемые в задаче числа целые положительные, значит, каждое из них не меньше, чем единица. Если бы каждое из этих чисел равнялось единице, то их сумма равнялась бы 2010, а не 2011, значит, среди 2010 данных чисел найдется по крайней мере одно число, большее единицы. Ясно, что такое число ровно одно и это число 2 (иначе сумма была бы больше 2011). Значит, произведение всех чисел (а именно 2010 единиц и 1 двойки) равно 2.
Ответ: 2.

6. Обозначим сторону второго по величине квадрата за x и выразим стороны всех остальных. В центре каждого квадрата указаны длины их сторон. Из рисунка видно, что горизонтальная сторона прямоугольника с одной стороны равна $4x + 12$, а другой стороны равна $8x - 8$.
Решая уравнение $4x + 12 = 8x - 8$, находим $x = 5$, следовательно, длина стороны самого большого квадрата равна $2 \cdot 5 + 8 = 18$.
Ответ: сторона самого большого квадрата равна 18.



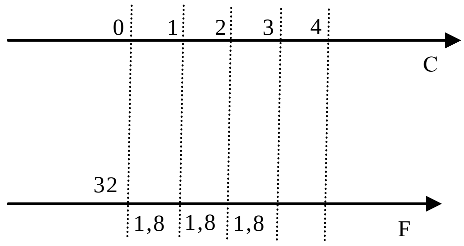
2012 год

1. Эти числа имеют вид $24x$ и $24y$, причем x и y взаимно просты. Тогда $24(x+y)=192$, откуда $x+y=8$. Возможные значения x и y: 1 и 7; 3 и 5. Тогда искомые числа: 24 и 168 или 72 и 120.
Ответ: 24 и 168 или 72 и 120.

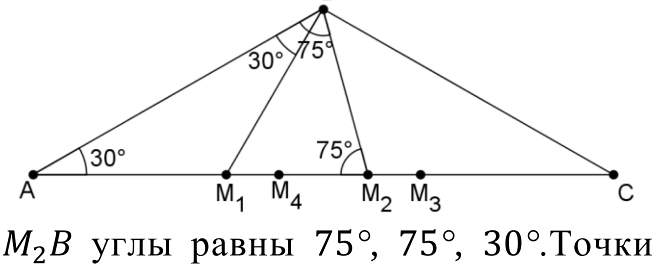
2. Обозначим скорости в гору и под гору через a и b соответственно. Тогда из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{6}{b}+\frac{12}{18}=1\frac{7}{60} \\ \frac{6}{a}+\frac{3}{b}+\frac{12}{18}=1\frac{16}{60} \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, получаем, что $-\frac{9}{a}-\frac{12}{18}=-1\frac{25}{60}$, откуда $a=12$.
Тогда $b=30$.
Ответ: скорость движения в гору равна 12 км/ч, скорость движения под гору равна 30 км/ч.

3. Умножим обе дроби на 10 и сравним результаты: $\frac{10^{11}+10}{10^{11}+1}$ и $\frac{10^{12}+10}{10^{12}+1}$. Заметим, что $\frac{10^{11}+10}{10^{11}+1}=\frac{10^{11}+1+9}{10^{11}+1}=1+\frac{9}{10^{11}+1}$. Аналогично $\frac{10^{12}+10}{10^{12}+1}=1+\frac{9}{10^{12}+1}$. Первая дробь больше единицы на $\frac{9}{10^{11}+1}$, вторая – на $\frac{9}{10^{12}+1}$. Следовательно, первая дробь больше второй.
Ответ: первая дробь больше.

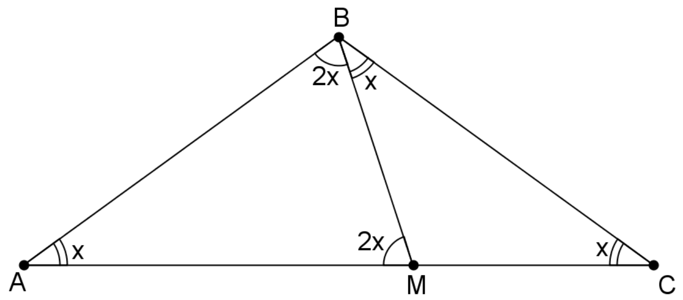
4. Глядя на схему, заметим, что температура по Фаренгейту $T=(32+1{,}8\cdot x)$°F, где x – температура по Цельсию. Из уравнения $32+1{,}8\cdot x=x$ найдем, что $x=-40$, то есть -40°C $=-40$°F.
Ответ: может.



5. В треугольнике AMB могут быть равны стороны AB и AM или AM и MB. Найдем соответствующие положения точки M (см. рисунок). Если $AM_1=BM_1$, то в треугольнике AM_1B углы равны 30°, 30°, 120°. Если $AM_2=AB$, то в треугольнике AM_2B углы равны 75°, 75°, 30°.Точки M_3, M_4 симметричны M_1 и M_2 относительно середины отрезка AC. Итак, нам годятся 4 точки.



Выясним, при какой величине угла B точки попарно совпадают. Пусть M_2 совпала с M_3 (см. рисунок). Обозначив через x углы при основании BC равнобедренного треугольника MCB, заметим, что $\angle BAC = x$, поскольку исходный треугольник равнобедренный. $\angle BMA = 2x$ по теореме о внешнем угле для треугольника MBC. Тогда $\angle ABM = 2x$ и, значит, сумма всех углов исходного треугольника ABC равна $x + x + x + 2x = 180°$, откуда находим, что $x = 36°$.



Ответ: при угле $108°$.

6. Пусть второе утверждение верно. Перебрав двузначные числа, делящиеся на 23 (которых совсем немного), находим единственное подходящее под условие число – 46.

   Пусть второе утверждение не верно, а первое верно. Тогда A оканчивается на 0 или 5 и, значит, $A + 7$ заканчивается на 7 или 2, что невозможно для точного квадрата. Значит, утверждение 3 ложно, тогда утверждение 4 истинно. Тогда $A - 10$ оканчивается на 0 или 5 и является точным квадратом натурального числа, откуда следует, что $A = 35$.

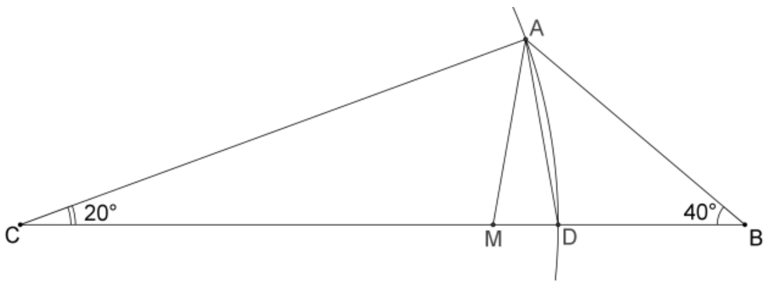
   Пусть, наконец, первое и второе утверждения оба не верны. Тогда, поскольку $(A + 7) - (A - 10) = 17$, нам нужно найти два квадрата, отличающиеся на 17 – это 64 и 81. Тогда $A = 74$.

   Итого, мы нашли три числа: 46, 35, 74, − и доказали, что других нет.

   Ответ: 46, 35 и 74.

2013 год

1. Пусть у Маши n конфет. Тогда у Вани $n + 90$ конфет. Маша отдала Ване $\frac{n}{3}$ конфет, а Ваня отдал Маше $\frac{n+90}{3}$ конфет.
   У Вани стало $n + 90 - \left(\frac{n}{3} + 30\right) + \frac{n}{3} = n + 60$ конфет, а у Маши теперь $n - \frac{n}{3} + \left(\frac{n}{3} + 30\right) = n + 30$ конфет. То есть у Вани стало на 30 конфет больше, чем у Маши.
   Ответ: теперь у Вани на 30 конфет больше, чем у Маши.
2. Разделим данные 100 конфет на кучки в 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 конфет. Заметим, что в каждой кучке нечетное количество конфет. Следовательно, при разбиении любой кучки на две меньшие мы получим кучку с нечетным количеством и кучку с четным количеством конфет. При этом в кучке с нечетным количеством конфет, конфет будет меньше, чем до разбиения, а такая кучка у нас уже есть. То есть при любом разбиении любой кучки найдутся две кучки с одинаковым (нечетным!) количеством конфет.
   Ответ: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.
3. Посмотрим, когда выполняется данное равенство:
   $a^2 + b = b^2 + a \Leftrightarrow (a^2 - b^2) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0.$
   Отсюда следует, что равенство выполняется не только в случае, если $a = b$, но и в случае, если $a + b = 1$, например, при $a = \frac{1}{3}$ и $b = \frac{2}{3}$.
   Для того чтобы ответить на вопрос задачи, можно было, конечно, и просто привести пример различных положительных чисел, для которых данное равенство выполняется (например, те же $a = \frac{1}{3}$ и $b = \frac{2}{3}$).
   Ответ: выиграл Анатолий Алексеевич.
4. Отложим отрезок CD, равный AC, на луче CB. Так как $\angle CAB$ − тупой, то $CB > AC$ и точка D лежит на отрезке CB. Найдем длину отрезка BD.



   Треугольник ΔACD − равнобедренный по построению. Значит, $\angle CAD = \angle CDA = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$. ΔAMD − также равнобедренный с основанием MD ($\angle AMD = 180° - \angle MAB - \angle MBA = 80° = \angle ADM$), поэтому $AD = AM = 2$.
   Наконец, $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 120° - 80° = 40°$. Значит, треугольник ΔABD равнобедренный с основанием AB, и $BD = AD = 2$.
   Ответ: разность длин отрезков BC и AC равна 2.

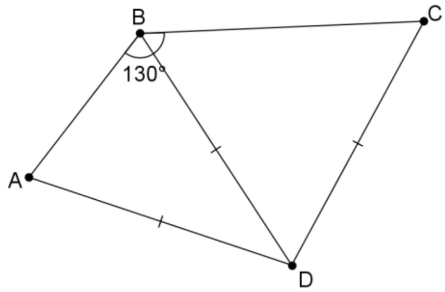
5. $\frac{2012}{2013} = \frac{2012 \cdot 10001}{2013 \cdot 10001} = \frac{20122012}{20132013} < \frac{20122013}{20132012}$. Последнее неравенство верно, так как у второй дроби числитель больше, а знаменатель меньше.
   Ответ: $\frac{2012}{2013} < \frac{20122013}{20132012}$.

6. Пусть скорость Леши (измеряемая в ступеньках в единицу времени) равна $V_л$, а время, которое он двигался, равно $t_л$. Время, которое двигался Юра, обозначим $t_ю$, а скорость Юры по условию равна $3V_л$. По условию задачи верны равенства: $\begin{cases} V_л \cdot t_л = 50, \\ 3V_л \cdot t_ю = 75. \end{cases}$
   Поделим второе равенство на 3: $\begin{cases} V_л \cdot t_л = 50, \\ V_л \cdot t_ю = 25. \end{cases}$
   Отсюда видно (можно поделить одно равенство на другое), что $t_л = 2t_ю$, то есть Леша двигался в 2 раза дольше.
   Итак, Леша двигался больше Юры на $2t_ю - t_ю = t_ю$. За это время "уехали" 25 ступенек (Леша наступил только на 50 ступенек, в то время как Юра на 75). Значит, за время $t_ю$ (это время движения Юры!) "уезжает" 25 ступенек. Тогда на неподвижном эскалаторе 75 (столько насчитал Юра, пока двигался) + 25 (столько "уехало", пока Юра двигался) = 100 ступенек.
   Ответы: а) в 2 раза; б) 100 ступенек.

2014 год

1. Покажем, что мальчикам удастся съесть пирог и торт за 3 минуты, построив пример. Дадим вначале каждому из мальчиков есть то, что он ест быстрее: Косте – торт, а Леше – пирог. Через 2 минуты Леша съест весь пирог, а Костя съест полторта. За оставшуюся минуту они могут съесть $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ торта, а у нас осталось меньше, всего $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$ торта. Таким образом, они управятся даже быстрее, чем нужно.
Ответ: удастся.

2. Треугольник ΔABD – равнобедренный, следовательно $\angle BAD=\angle ABD$, а $\angle ADB=180°-\angle BAD-\angle ABD=180°-2\angle ABD$.
Аналогично, рассмотрев треугольник ΔBCD, получаем $\angle CDB=180°-2\angle CBD$.
Тогда $\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=$
$=180°-2\angle ABD+180°-2\angle CBD=$
$=360°-2(\angle ABD+\angle CBD)=$
$=360°-2\angle ABC=360°-2\cdot 130°=100°$.
Ответ: 100°.



3. Введем обозначение: а $=29\frac{13}{17}$.
Тогда $28\frac{13}{17}=a-1$; $30\frac{13}{17}=a+1$ и $31\frac{13}{17}=a+2$, а "страшное" выражение с дробями преобразуется в
$a(a+1)-(a-1)(a+2)=a^2+a-(a^2+a-2)=a^2+a-a^2-a+2=2$.
Получается, что оба числа равны.
Ответ: числа равны.

4. Воспользуемся формулой $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$. Мы можем сразу посчитать, что получится во второй скобке: $(x^2+y^2-xy)=38-13=25$.
Для того чтобы найти значение первой скобки, заметим, что
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=38+2\cdot 13=64$
Если квадрат числа равен 64, то само число равно 8 или -8.
Получаем, что $x^3+y^3=8\cdot 25=200$ или $x^3+y^3=-8\cdot 25=-200$.
Ответ: 200 или -200.

5. а) Да, удастся:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

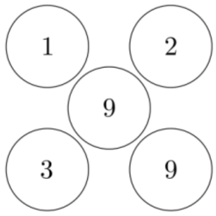
б) Предположим, что Валере это удалось. Под карточкой с числом 11 лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 12 до 22. В этом промежутке есть всего один точный квадрат – это число 16, значит, под карточкой с числом 11 Валера положил карточку с числом 5, (потому что $16-11=5$).

Под карточкой с числом 4 тоже лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 5 до 15. В этом промежутке тоже всего один точный квадрат – это число 9, но чтобы получить в этом столбике 9, нужно положить карточку "5", а она уже занята. Получаем противоречие. Значит, в этот раз Валере не удастся выложить свои карточки.

Ответы: а) удастся; б) не удастся.

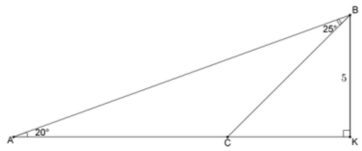
2015 год

1. **Ответ:**



2. Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых (u), то тоже получится общее количество дней. Значит $v + v_d + u_d + u = 2d$. По условию $v = 11$ (вечера без дождя), $u = 16$ (утра без дождя), и $v_d + u_d = 11$ (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда $11 + 11 + 16 = 38 = 2d,\ d = 19$.
   Ответ: поход длился 19 дней.

3. Заметим, что треугольник ABC – тупоугольный с углом ACB, равным 135°. Основание высоты BK – точка K – принадлежит прямой AC, но не принадлежит отрезку AC (см. рисунок).



   Угол BCK равен $20° + 25° = 45°$ (по теореме о внешнем угле). Тогда угол CBK тоже равен $90° - 45° = 45°$. Таким образом, получаем, что треугольник CBK – равнобедренный. Следовательно, $BK = KC = 5$.
   Ответ: $KC = 5$.

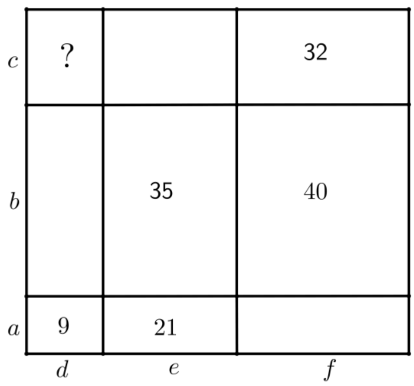
4. Суммы цифр номеров карт могут меняться от 1 (для номера 100) до 27 (для номера 999). Заметим, что среди имеющихся 900 карт сумму 1 имеет лишь карта 100, сумму 27 – лишь карта 999, а для всех остальных сумм (от 2 до 26) можно найти не менее трех карт, сумма цифр номеров которых равна этой сумме (например, сумму 2 имеют карты 101, 110 и 200).
   Предположим, что Павел вынул сначала 27 карт и обнаружил, что суммы цифр их номеров имеют значения от 1 до 27. Если Павел вынет еще 25 карт, то может случиться, что он вытянул карты с суммами цифр номеров от 2 до 26, и у него по-прежнему нет трех карт с одинаковой суммой номеров. Таким образом, 52 карт Павлу может не хватить.
   В то же время, если он вытянет 53 карты, то среди них обязательно найдутся три с одинаковой суммой. Докажем это: предположим, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой. Тогда всего карт не больше, чем
   1 (карта 100) + $2 \cdot 25$ (25 карт с суммами от 2 до 26) + 1 (карта 999) = 52, но у нас 53 карты. Получаем противоречие, значит, наше предположение, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой, неверно, что и требовалось доказать.
   Ответ: 53 карты.

5. Так как $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, то $(a + b)^2 - 2ab = (c + d)^2 - 2cd$ и, следовательно, $-2ab = -2cd$. Значит, $ab = cd$. Тогда:
   $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (c + d)(c^2 - cd + d^2) = c^3 + d^3$.
   Ответ: равенство верно.

6. Любое трехзначное число имеет вид $\overline{abc}$, где a – любая цифра от 1 до 9, а b и c – любые цифры от 0 до 9. Рассмотрим все возможные значения произведения $a \cdot b \cdot c$. Их сумму удобно записать в таком виде:
   $(1 + 2+\ldots+9)(0 + 1 + 2+\ldots+9)(0 + 1 + 2+\ldots+9)$.
   Действительно, при раскрытии скобок получится 900 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение цифр одного из девятисот трехзначных чисел. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомое число равно 45^3.
   Ответ: 45^3.

2016 год

1. а) Обозначим на чертеже, для удобства, равные друг другу отрезки буквами a, b, c, d, e и f.



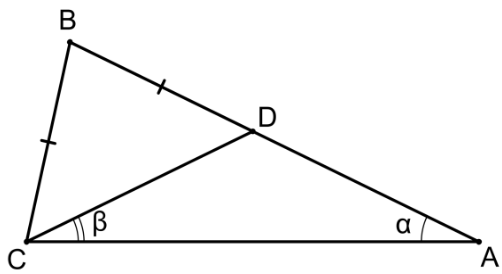
Разность периметров двух верхних прямоугольников в правом столбце равна $2(b-c)$, также как и разность периметров двух верхних прямоугольников во втором столбце. Таким образом, периметр верхнего прямоугольника во втором столбце равен $35-(40-32)=27$.
Аналогично, периметры двух левых прямоугольников в нижнем ряду, как и периметры двух левых прямоугольников в верхнем ряду, различаются на $2(e-d)$, значит, периметр левого верхнего прямоугольника равен $27-(21-9)=15$.

б) Сумма периметров прямоугольников на главной диагонали равна
$2(a+d)+2(b+e)+2(c+f)=2(a+d+b+e+c+f)=9+35+32=76$.
Периметр квадрата тоже равен $2(a+b+c+d+e+f)=76$.
Ответы: а) 15; б) 76.

2. Для того чтобы набрать не меньше 27 грамм, Васе потребуется достать как минимум 7 гирь (сумма чисел от 1 до 6 равна 21, а от 1 до 7 – уже 28). В момент равновесия суммарный вес всех гирек и груза в два раза больше веса одной из чашек, то есть является четным числом, значит, вес вынутых Васей гирь должен быть нечетным (если к 27 прибавить четное число, то получится нечетное число). Для того чтобы набрать нечетный вес, Васе потребуется как минимум 9 гирек, так как сумма чисел от 1 до 8 равна 36, а от 1 до 9 равна 45. Покажем, что 9 гирек нам хватит: если первые 8 гирек Вася положит на первую чашу, а девятую гирьку – на вторую, то на обеих чашах будет по 36 грамм.
Ответ: 9 гирь.

3. Неправильно идущие часы показывают правильное время в тот момент, когда отстают или убегают ровно на 12 часов.
Первые часы отстают на час за 4 дня, значит, на 12 часов отстанут за 48 дней. Вторые часы убегают на час за 6 дней, значит, на 12 часов убегут за 72 дня. Если они одновременно показывают правильное время, то количество прошедших дней делится и на 72 и на 48. Наименьшее из таких чисел – число 144.
Ответ: Через 144 дня.

4. Пусть $\angle DAC=\alpha$, а $\angle DCA=\beta$. По условию, $\angle BCA=3\alpha$, тогда $\angle BCD=3\alpha-\beta$. Треугольник CBD – равнобедренный, значит, углы при его основании равны:
$\angle BDC=\angle BCD=3\alpha-\beta$.
Кроме того, $\angle BDC$ является внешним углом для треугольника ADC, значит,



$\angle BDC = \angle DCA + \angle DAC = \alpha + \beta$.

Получаем, что $3\alpha - \beta = \alpha + \beta \ \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \ \Rightarrow \ \alpha = \beta$.

В треугольнике ADC два угла равны, значит он равнобедренный, то есть $CD = AD = 4$.

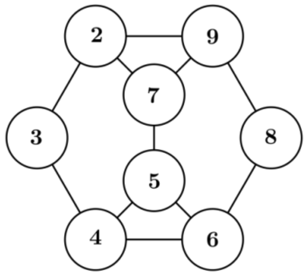
Ответ: $CD = 4$.

5. Обозначим эти числа за a и b.
   Тогда утверждение Юры: $a + b = 2014$.
   Утверждение Кости: $ab = 2015$.
   У Валеры получается: $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$.
   Воспользовавшись утверждениями Юры и Кости, получим:
   $ab + (a + b) + 1 = 2014 + 2015 + 1 = 4030$.
   Ответ: у Валеры получилось 4030.

6. В каждой партии разыгрывается 1 очко: (1+0) в случае победы одного из игроков или (0,5+0,5) в случае ничьей. Значит, количество всех набранных очков равно числу сыгранных партий. Если в турнире участвовало n игроков, значит, каждый сыграл $(n-1)$ партий, и всего было $\frac{n(n-1)}{2}$ партий. Победитель, выиграв у всех, набрал $(n-1)$ очко, все остальные вместе набрали в пять раз больше, т.е. $5(n-1)$ очков. Тогда получаем уравнение:
   $\frac{n(n-1)}{2} = (n-1) + 5(n-1) \ \Leftrightarrow \ n(n-1) = 12(n-1) \ \Leftrightarrow \ (n-12)(n-1) = 0$.
   Очевидно, n не может быть равно 1 – тогда бы турнир не состоялся. Таким образом, $n = 12$.
   Ответ: 12 участников.

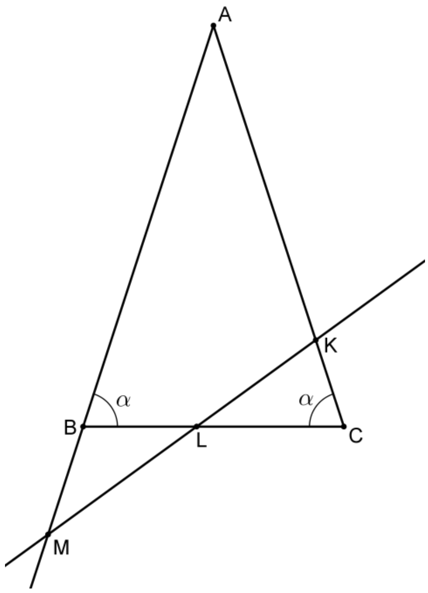
2017 год

1. Ответ: (*Возможны и другие решения.*)



2. Заметим, что Беня не может оказаться рыцарем, иначе он, говоря правду, не сказал бы про себя, что он не рыцарь. Также Беня не может оказаться и лжецом, так как тогда он сказал бы правду, говоря, что он не рыцарь, на самом деле являясь не рыцарем. Таким образом, **Беня** может быть только **хитрецом**. Сеня, утверждая, что он не хитрец, не мог солгать, так как иначе выходило бы, что он действительно хитрец, но хитрец уже найден. Тогда **Сеня** сказал правду и является **рыцарем**. Тогда он сказал правду и про Таню. Значит, **Таня – рыцарь**. Получается, **Веня – лжец**. Проверим остальные фразы. Беня, являясь хитрецом и утверждая, что Таня – лжец, мог и солгать. Веня, будучи лжецом, солгал, утверждая, что он не лжец, а Таня – хитрец, то есть, действительно, Веня – лжец, а Таня не является хитрецом. В итоге: Беня – хитрец, Веня – лжец, Сеня – рыцарь, Таня – рыцарь.
   Ответ: Таня – рыцарь.

3. Пусть дан равнобедренный ΔABC с основанием BC и боковыми сторонами AB и AC.



   1) $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника).
   2) Заметим, что α – острый, иначе получим противоречие с суммой углов треугольника. Тогда $\angle MBL$ – тупой.
   3) $\Delta\, MBL$ – равнобедренный по условию и тупоугольный по п.2, значит, $\angle BML = \angle BLM = \frac{\alpha}{2}$.
   4) $\angle KLC = \angle BLM = \frac{\alpha}{2}$ (как вертикальные).
   5) ΔCKL – равнобедренный, значит, два его угла равны. $\angle KLC \neq \angle ACB$, так как $\frac{\alpha}{2} \neq \alpha$.
   6) Пусть $\angle KLC = \angle LKC = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle BML = \angle LKC$, а они накрест лежащие при прямых MA и AK и секущей MK, т.е. $MA \parallel AK$, что невозможно.
   7) Остается один вариант: $\angle KCL = \angle LKC = \alpha$. Тогда $\angle KLC = 180° - 2\alpha$. С другой стороны, $\angle KLC = \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $180° - 2\alpha = \frac{\alpha}{2}$. Откуда, $\alpha = 72°$.
   8) В итоге, углы ΔABC: $\angle ABC = \angle ACB = \alpha = 72°$; $\angle BAC = 180° - 2\alpha = 36°$.
   Ответ: $72°, 72°, 36°$.

4. Будем решать задачу с конца. После ухода Кости осталось 8 книг, причем это число на 1 меньше половины количества книг до его прихода. Значит, перед приходом Кости книг было $(8 + 1) \cdot 2 = 18$.

В свою очередь, это число на 1 больше половины количества книг перед приходом Леши, значит, перед его приходом было $(18-1) \cdot 2 = 34$ книги. Последнее число на 2 меньше двух третей количества книг в самом начале, перед приходом Юры, значит, всего книг было $(34+2):\frac{2}{3} = 54$.

Ответ: 54 книги.

5. Для того, чтобы переместиться из левого нижнего угла доски в правый верхний, конь должен пройти 2016 клеток вправо и 2017 клеток вверх. Таким образом, ему надо пройти $2016 + 2017 = 4033$ клетки. Любой из двух разрешенных ходов приближает коня к цели ровно на три клетки. Так как 4033 не делится на 3, то попасть в правую верхнюю клетку конь не сможет.

   Ответ: не сможет.

6. Пусть $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = x$, тогда $a+b=cx$, $b+c=ax$ и $c+a=bx$. Сложим левые и правые части наших равенств: $2(a+b+c) = (a+b+c)x$. Это равенство может выполняться в двух случаях:

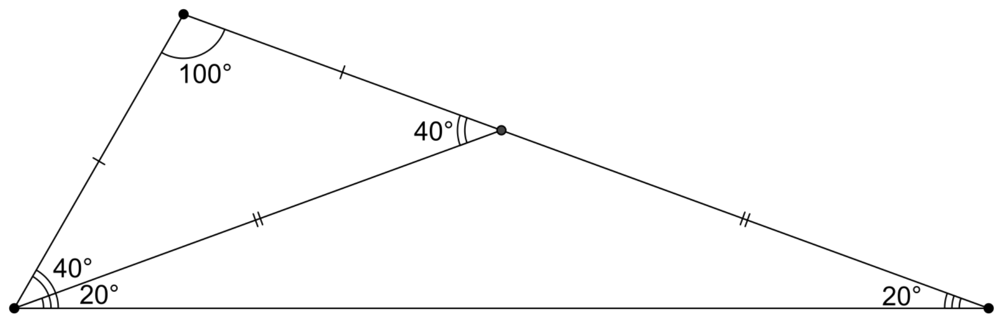
   $a+b+c \neq 0$, тогда $x=2$. (Достигается, например, когда $a=b=c=1$.)

   $a+b+c=0$, тогда $x = \frac{a+b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$. (Достигается, например, когда $a=2,\ b=c=-1$.)

   Ответ: -1 или 2.

2018 год

1. **Ответ:**

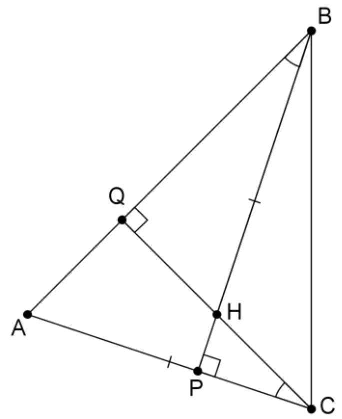


2. Предположим, что это возможно. Каждый из участников сыграл по три партии, значит, всего было 6 партий, из них четыре закончились ничьей, а две были кем-то выиграны. Если Леша "потерял" только 0,5 очка, значит, 2 партии он выиграл, а одну сыграл вничью. Отсюда следует, что больше никто, кроме Леши, побеждать не мог. Если Ваня набрал только 0,5 очка, то две партии он проиграл и одну сыграл вничью. Но для того, чтобы проиграть две партии, нужны два выигравших соперника, а выигрывал только Леша. Получаем противоречие, значит, такого быть не могло.
   Ответ: не могло.

3. Сложив оба уравнения, получим:
   $a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \iff (a-2b)^2 = 0 \iff a = 2b$.
   Подставим a во второе уравнение: $4b^2 - 2b^2 = 2 \iff 2b^2 = 2 \iff b^2 = 1$, откуда, учитывая, что b – положительное число, получаем, что $b = 1$. Тогда $a = 2$.
   Ответ: $a = 2, b = 1$.

4. Обозначим место встречи буквой C и предположим, что от начала движения до момента встречи прошло t часов, т.е. первому поезду для того, чтобы проехать расстояние AC, нужно t часов, а второму – для того, чтобы проехать BC, тоже нужно t часов.
   Пусть скорости поездов равны v_1 и v_2. Получается, что $AC = 4{,}5v_2 = tv_1$ и $BC = 2v_1 = tv_2$, значит, $v_2 : v_1 = 2 : t = t : 4{,}5$, откуда $t = 3$. Один поезд тратит на весь путь $3 + 2 = 5$ часов, а второй $3 + 4{,}5 = 7{,}5$ часов. Зная путь и время, найдем скорость: $v_1 = \frac{360 \text{ км}}{5 \text{ ч}} = 72$ км/ч, $v_2 = \frac{360 \text{ км}}{7{,}5 \text{ ч}} = 48$ км/ч.
   Ответ: 72 км/ч и 48 км/ч.

5. Заметим, что $\angle ACQ = 90° - \angle BAC$ и $\angle PBA = 90° - \angle BAC$, значит, $\angle ACQ = \angle PBA$. Из этого (и из условия) следует, что прямоугольные треугольники ΔACQ и ΔHBQ равны по гипотенузе и острому углу, значит, равны все их соответственные элементы, в частности, катеты CQ и BQ. Но тогда в прямоугольном треугольнике ΔBCQ катеты равны друг другу, т.е. он равнобедренный, значит, $\angle QCB = \angle QBC = 45°$.
   Ответ: $\angle ABC = 45°$.



6. Во-первых, "хорошая" цифра не может стоять ни в начале, ни в конце, так как у нее должно быть два соседа. Во-вторых, "хорошая" цифра больше каждого из своих соседей, значит, две соседние цифры не могут одновременно быть "хорошими". Отсюда: среди первых трех не больше одной "хорошей", среди последних трех не больше одной "хорошей", и среди оставшихся в середине четырех – не больше двух "хороших". Таким образом, красивых цифр не больше 4. Приведем пример, в котором их четыре: 7813264950.
   Ответ: четыре.

2019 год

1. **Ответ:** Например, 2,4,6,12,24,48; есть и другие варианты.
2. Пусть заяц взял гири a и b ($a < b$). Тогда волк может взять $a - 1$ и $b + 1$, если $a > 1$ и $b < 2018$. Оставшиеся случаи разберем по отдельности.

   Пусть заяц взял 1 и b. Волк может взять 2 и $b - 1$, если $b - 1 > 2$, то есть $b > 3$. При $b = 2$ и $b = 3$ подобрать ту же сумму (3 или 4) не удастся.

   Пусть заяц взял a и 2018. Волк может взять $a + 1$ и 2017, если $a + 1 < 2017$, то есть $a < 2016$. При $a = 2016$ и $a = 2017$ подобрать ту же сумму не удастся.

   Ответ: Заяц мог взять пары гирь: 1 и 2, 1 и 3, 2017 и 2018, 2016 и 2018.
3. Преобразуем уравнение

$$x^2 + u^2 - 2(xy + yz + zu - y^2 - z^2) = 0$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + u^2 - 2uz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$$
$$(x - y)^2 + (u - z)^2 + (y - z)^2 = 0$$

   Сумма квадратов равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Тогда $x - y = u - z = y - z = 0$, откуда $x = y = z = u$.
4. Вопрос: “Вы пьете бургундское?”

   Мушкетер, пьющий анжуйское, ответил НЕТ

   Мушкетер, пьющий бургундское, ответил НЕТ

   Гвардеец, пьющий анжуйское, ответил ДА

   Гвардеец, пьющий бургундское, ответил ДА

   Таким образом, 44 человека, сказавших «ДА» на вопрос “Вы пьете бургундское?” – это все гвардейцы. Тогда мушкетеров всего $55 - 44 = 11$ человек.

   Вопрос: “Вы гвардеец?”

   Мушкетер, пьющий анжуйское, ответил НЕТ

   Мушкетер, пьющий бургундское, ответил ДА

   Гвардеец, пьющий анжуйское, ответил НЕТ

   Гвардеец, пьющий бургундское, ответил ДА

   Следовательно, на вопрос «Вы гвардеец» ответили «ДА» те и только те, кто пьет бургундское, и их 33 человека.

   Г – гвардейцы, М – мушкетёры, А – анжуйское, Б – бургундское.

Обозначим группы пьющих соответствующее вино мушкетеров и гвардейцев МБ, МА, ГБ, ГА.

Тогда МА+МБ+ГА+ГБ=55, МБ+ГБ=33, ГА+ГБ=44, МА+МБ=11.

Пусть x – мушкетёры, пьющие бургундское (МБ).

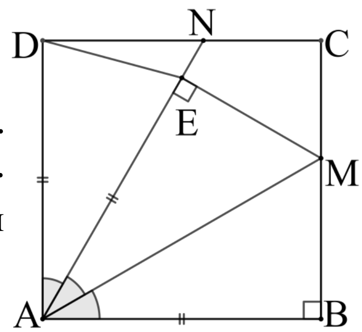
	Г	М
А	11+x	11-x
Б	33-x	X

Согласие с дождем означает, что либо лжецов (МА+ГБ), либо говорящих правду (МБ+ГА) ровно 22 человека.

Если первое верно, тогда $(33 - x) + (11 - x) = 22$, откуда $x = 11$.

Если верно второе предположение, то $(11 + x) + x = 22$, что невозможно при целом x.

Ответ: 11 мушкетёров пьют бургундское.



5. Прямоугольные треугольники AEM и ABM равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $AE = AB = AD$. Треугольник ADE равнобедренный с основанием DE. Значит, угол $\angle ADE = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Тогда угол $\angle EDN = 90° - 75° = 15°$.

   Ответ: $15°$.

6. Пусть n – количество кругов. Тогда к моменту Васиного финиша отставание от него Пети составит $2n$ секунд (один круг), а отставание от него же Коли – $5n$ секунд (два круга). $2n$ – это время прохождения круга Петей. За $(2n + 3)$ секунд один круг пройдет Коля. Получаем уравнение $2(2n + 3) = 5n$. То есть,
   Ответ: $n = 6$.

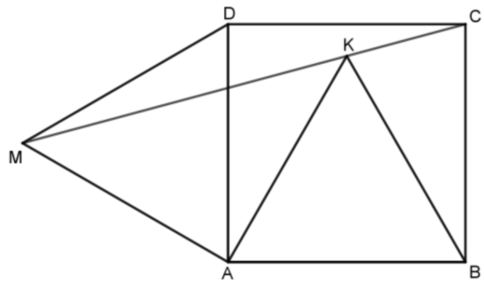
2020 год

1. Пусть сумма задуманных Костей чисел равна S, тогда сумма следующих пяти чисел равна $S + 5 \cdot 5 = S + 25$. Получаем уравнение $\frac{S}{S+25} = 0{,}8$, откуда $S = 100$. Если Костя задумал числа $n-2, n-1, n, n+1$ и $n+2$, то получается, что $5n = 100$, $n = 20$. Таким образом, Костя задумал числа 18, 19, 20, 21 и 22.
Ответ: да.

2. Предположим, что девочки задумали два различных натуральных числа a и b, причем $a > b \geq 1$. Заметим, что $n^3 - n = n^2(n-1)$.
Из неравенства $a > b \geq 1$ следует, что $a^2 > b^2 \geq 1$ и $a - 1 > b - 1 \geq 0$. Отсюда $a^2(a-1) > b^2(b-1)$, т.е. одинаковые результаты получиться не могли.
Ответ: Не могло.

3. Предположим, что количество конфет у девочек - $a, b, c\ и\ d$, причем $a \leq b \leq c \leq d$. По условию $a + b \geq 41$, а значит $b \geq 21$ (если $a \leq b < 21$, то $a + b \leq 20 + 20 = 40$). Тогда $c \geq b \geq 21$ и $a + b + c \geq 41 + 21 = 62$, а значит $d \leq 100 - 62 = 38$. Покажем, что у Лизы могло быть 38 леденцов: пусть у Лизы – 38 леденцов, у Насти и у Ксюши по 21 леденцу, и у Маши – 20 леденцов.
$21 + 20 = 41$, $21 + 21 > 41$, $38 + 20 > 41$, $38 + 21 > 41$.
$20 + 21 + 21 + 38 = 100$. Все условия выполнены.
Ответ: 38.

4.
$$\left(\frac{2019^2 + 2021^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2020-1)^2 + (2020+1)^2}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{2020^2 - 4040 + 1 + 2020^2 + 4040 + 1}{2}\right)^2 =$$
$$= (2020^2 + 1)^2 = 2020^4 + 2 \cdot 2020^2 + 1 = 2020^4 - 2 \cdot 2020^2 + 1 + 4 \cdot 2020^2 =$$
$$= (2020^2 - 1)^2 + (2 \cdot 2020)^2$$
Ответ: $\left(\frac{2019^2+2021^2}{2}\right)^2 = (2020^2 - 1)^2 + (2 \cdot 2020)^2$.

5. Заметим, что $\angle MAD = \angle KAB = \angle KBA = \angle AKB = 60°$, $\angle DAB = \angle CBA = 90°$ и $MA = AD = AB = AK$, $BC = BA = BK$.
Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK:
$\angle MAK = \angle MAD + \angle DAB - \angle KAB = 90°$,
$$\angle AMK = \angle AKM = \frac{180° - 90°}{2} = 45°.$$


Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK:
$\angle KBC = \angle CBA - \angle KBA = 30°$, $\angle BKC = \angle BCK = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.
$\angle MKC = \angle AKM + \angle AKB + \angle BKC = 180°$, т.е. точки C, M и K лежат на одной прямой.
Ответ: лежат.

6. Заметим, что при любой расстановке нулей и единиц в четыре клетки строки, цифра, которую нужно поставить в пятую клетку, чтобы сумма чисел в этой строке была четной, определяется однозначно. Аналогичное утверждение верно и для столбца.

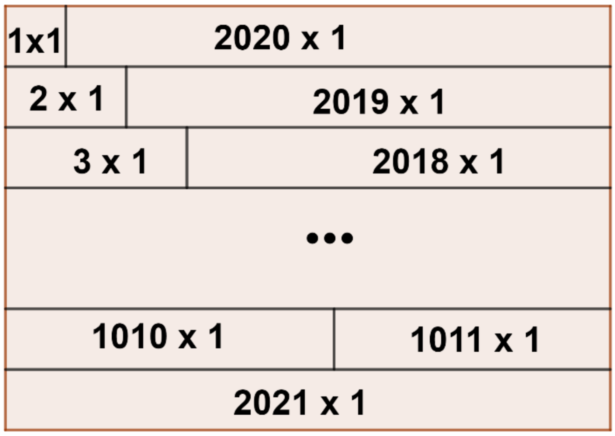
   Заметим также, что суммы чисел в прямоугольниках 4×5 и 5×4 должны оказаться четными. У этих прямоугольников есть общая часть – квадрат 4×4, поэтому четность суммы четырех чисел в последней строке и четность суммы четырех чисел в последнем столбце одна и та же. Следовательно, число, которое нужно поставить в последней угловой клетке, определяется однозначно.

   Таким образом, мы можем любым способом расставить нули и единицы в квадрате 4×4 и однозначно определить цифры в остальных клетках. Найдем, сколькими способами можно расставить нули и единицы в квадрате 4×4. В каждую из 16 клеток можно поставить либо нуль, либо единицу независимо от других клеток. Поэтому количество искомых способов расстановки будет равно $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{16} = 2^{16}$.

   Ответ: $\mathbf{2^{16}}$.

2021 год

1. Расположим полоски бумаги так, чтобы первый ряд строимого прямоугольника составили полоски размерами 1×1 и 2020×1. Во втором ряду расположим полоски размерами 2×1 и 2019×1. В третьем ряду – размерами 3×1 и 2018×1 и так далее. Предпоследний ряд займут полоски размерами 1010×1 и 1011×1. И, наконец, в последний ряд поместим самую длинную полоску размером 2021×1. В итоге мы получили прямоугольник, при составлении которого использовали все 2021 полоску, и длина и ширина которого больше 1.



2. Пусть даны числа a, b, c, d и e. Тогда $a + b + c + d + e = 50$. Пусть $a + b + +c + d = 40$, тогда $e = 10$. По условию сумма каких-то трёх чисел равна 30. Пусть все из этих трёх чисел содержатся в наборе чисел a, b, c, d. Тогда оставшееся из этих четырёх чисел равно 10 и мы приходим к противоречию с условием, так как нашли два одинаковых числа (число e тоже равно 10), а по условию все данные числа различны.
Таким образом, в сумме, равной 30, участвуют только **два** каких-нибудь числа из набора чисел a, b, c, d и число e. Пусть эти два числа из набора чисел a, b, c, d равны a и b. Тогда их сумма равна 20. Следовательно, $c + d = 20$. А значит $a + b = c + d$, что и требовалось доказать.

3. Пусть x детей написали слово «КЫСЯ», y детей написали «МУРЛОКОТАМ», а z детей – «КОТЯРКА». Тогда $x + y + z = 23$. Так как в словах «КЫСЯ» и «МУРЛОКОТАМ» буква «к» встречается один раз, а в слове «КОТЯРКА» – два раза, то $x + y + 2z = 30$. Наконец, так как буква «я» встречается по одному разу и только в словах «КЫСЯ» и «КОТЯРКА», то $x + z = 20$. Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y + z = 23, \\ x + y + 2z = 30, \\ x + z = 20. \end{cases}$$
Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $z = 7$. Подставляя найденное значение z в третье уравнение, получаем, что $x = 13$.
Ответ: 13 детей написали слово «КЫСЯ».

4. Пусть сначала на крыше здания сидело x ворон. Тогда после того, как улетело 75% ворон, их осталось $x - 0{,}75x = 0{,}25x$. Далее, после того как на крышу прилетело 80 других ворон, на крыше стало $(0{,}25x + 80)$ ворон. Во второй раз ворон осталось
$$\left(\frac{1}{4}x + 80\right) - \left(\frac{1}{4}x + 80\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{20}x + 16,$$

а после того, как прилетело 75 других ворон, их стало

$$\frac{1}{20}x + 16 + 75 = \frac{1}{20}x + 91.$$

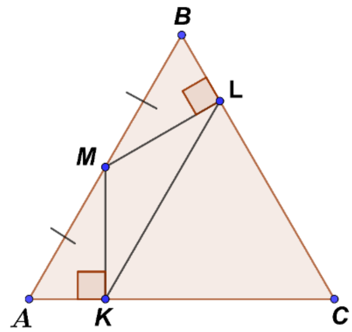
Из этой формулы следует, что первоначальное число ворон кратно 20. Наконец, по условию задачи $x > x/20 + 91$. Проверим это неравенство для чисел, делящихся на 20:

$$20 \le \frac{1}{20} \cdot 20 + 91 = 92,$$
$$40 \le \frac{1}{20} \cdot 40 + 91 = 93,$$
$$60 \le \frac{1}{20} \cdot 60 + 91 = 94,$$
$$80 \le \frac{1}{20} \cdot 80 + 91 = 95.$$

А при $x = 100$ (следующее число, кратное 20) неравенство уже верно.

Ответ: наименьшее число ворон, которые могли сидеть на крыше до Лёшиного прихода, равно 100.

5. Заметим, что $\triangle AMK = \triangle BML$ как прямоугольные по гипотенузе $(AM = MB = 1/2)$ и острому углу $(\angle A = \angle B = 60^\circ)$. Тогда из равенства треугольников следует, что $AK = BL$.

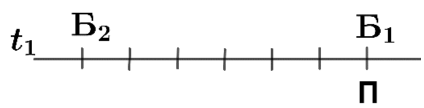


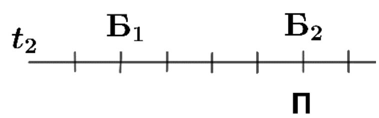
Далее, заметим, что $\angle AMK = \angle BML = 30^\circ$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника о катете, лежащем напротив угла 30°, имеем, что $AK = BL = 1/4$, следовательно, $KC = LC = 3/4$.

Рассмотрим $\triangle KLC$. В нём $KC = LC$ и $\angle C = 60^\circ$. Значит, он равносторонний и $KL = 3/4$.

Ответ: $KL = 3/4$.

6. Пусть t_1 – момент встречи пастуха с первым бараном, а t_2 – со вторым. В момент t_1 расстояние между пастухом и вторым бараном равнялось 6 м, то есть за время $t_2 - t_1$ они сблизились на 6 метров.





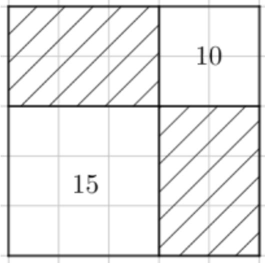
Поскольку баран быстрее пастуха в 5 раз, то второй баран за это время преодолел 5 метров, а пастух – 1 метр. За это время первый баран тоже пробежал 5 метров в том же направлении, что и пастух, и расстояние между первым бараном и пастухом стало равно $5 - 1 = 4$ метра. Поскольку после этого бараны бегут друг за другом с одинаковой скоростью, то расстояние между ними будет сохраняться и дальше. Это верно и для любых двух соседних баранов.

Ответ: 4 метра.

2022 год

1. $99995^2 = (10^5 - 5)^2 = 10^{10} - 2 \cdot 5 \cdot 10^5 + 25 = 10^6(10^4 - 1) + 25 = 9999000025$.
   Ответ: да, $\mathbf{99995^2 = 9999000025}$.

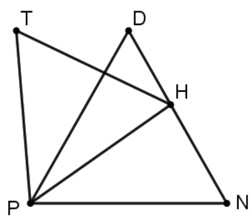
2. Суммы в двух верхних строчках и двух правых столбцах одинаковы. Тогда суммы чисел в заштрихованных областях равны (пусть эти суммы S). Сумма в двух правых столбцах относится к сумме в трёх левых как 2:3. $\frac{10+S}{S+15} = \frac{2}{3}$, $S = 0$, тогда сумма чисел во всей таблице $2S + 15 + 10 = 25$.
   Ответ: 25.



3. Преобразуем по очереди левую и правую часть:
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y) = (x^2+y^2)(x+y)$$
$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y = 2(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x+y) =$$
$$= 2(x+y)^2 - 2(x+y) = (x+y)(2(x+y) - 2)$$
   Отсюда $(x^2+y^2)(x+y) = (x+y)(2(x+y)-2)$. Так как $x + y > 0$, можем разделить обе части на $x + y$. Таким образом получаем:
$$x^2 + y^2 = 2(x+y) - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0,$$
   что возможно только при $x = y = 1$.

4. Пусть Лёша не меняет направление. Когда он пройдёт ещё 4/9 моста (ему останется пройти 1/9 моста), на мост въедет машина. Догонит она его на конце моста, то есть за одно и то же время машина проедет мост, а Лёша пройдет 1/9 моста. Отношение скоростей 9:1.
   Ответ: 9 : 1.

5. $\angle NPH = 60° - \angle DPH = \angle DPT$. $TP = PH, PD = PN$, следовательно $\Delta NPH = \Delta DPT$. Отсюда получаем, что $\angle PDT = \angle PNH = 60°$. Прямая TD параллельна прямой PN, так как накрест лежащие углы $\angle TDP$ и $\angle DPN$ равны $60°$. Значит, перпендикуляр из точки T на прямую PN равен высоте треугольника PND, то есть 5.
   Ответ: 5.



6. Пусть за один ход перевернули a синих карточек и $20 - a$ зелёных. Тогда количество синих изменится на $(-a) + (20 - a) = 20 - 2a$ (чётное число), а зелёных на $\left(-(20-a)\right) + a = 2a - 20$. Поскольку исходно было нечётное количество синих карточек, то и после любого количества ходов количество синих будут нечетным. Значит, 0 синих карточек получить нельзя – всю полоску не сделать зелёной. За один ход всю полоску сделать синей нельзя – количество «несиних» больше 20.
   За два хода можно: первым ходом перевернем 6 синих и 14 зеленых, тогда получится 17 синих и 20 зеленых, вторым ходом перевернем все 20 зеленых.
   Ответ: За два хода можно сделать полоску полностью синей, полностью зеленой сделать нельзя.